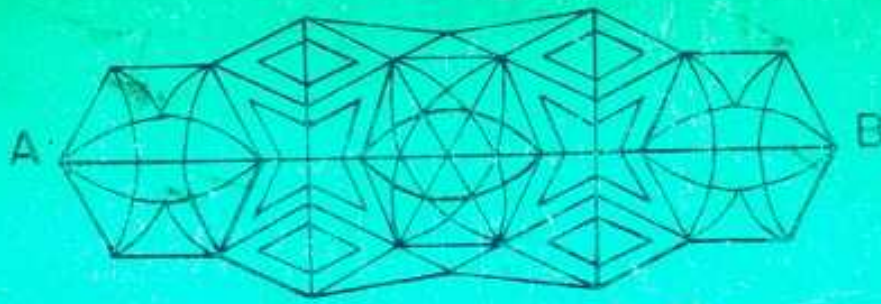
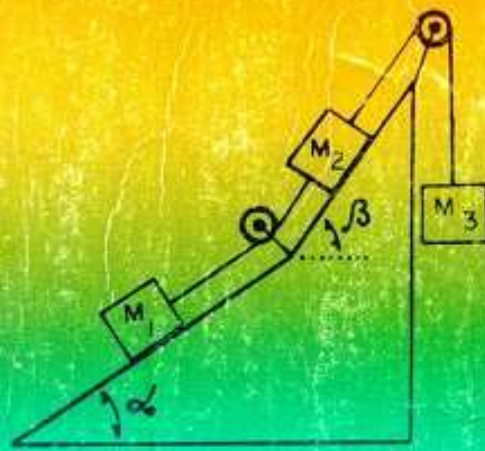
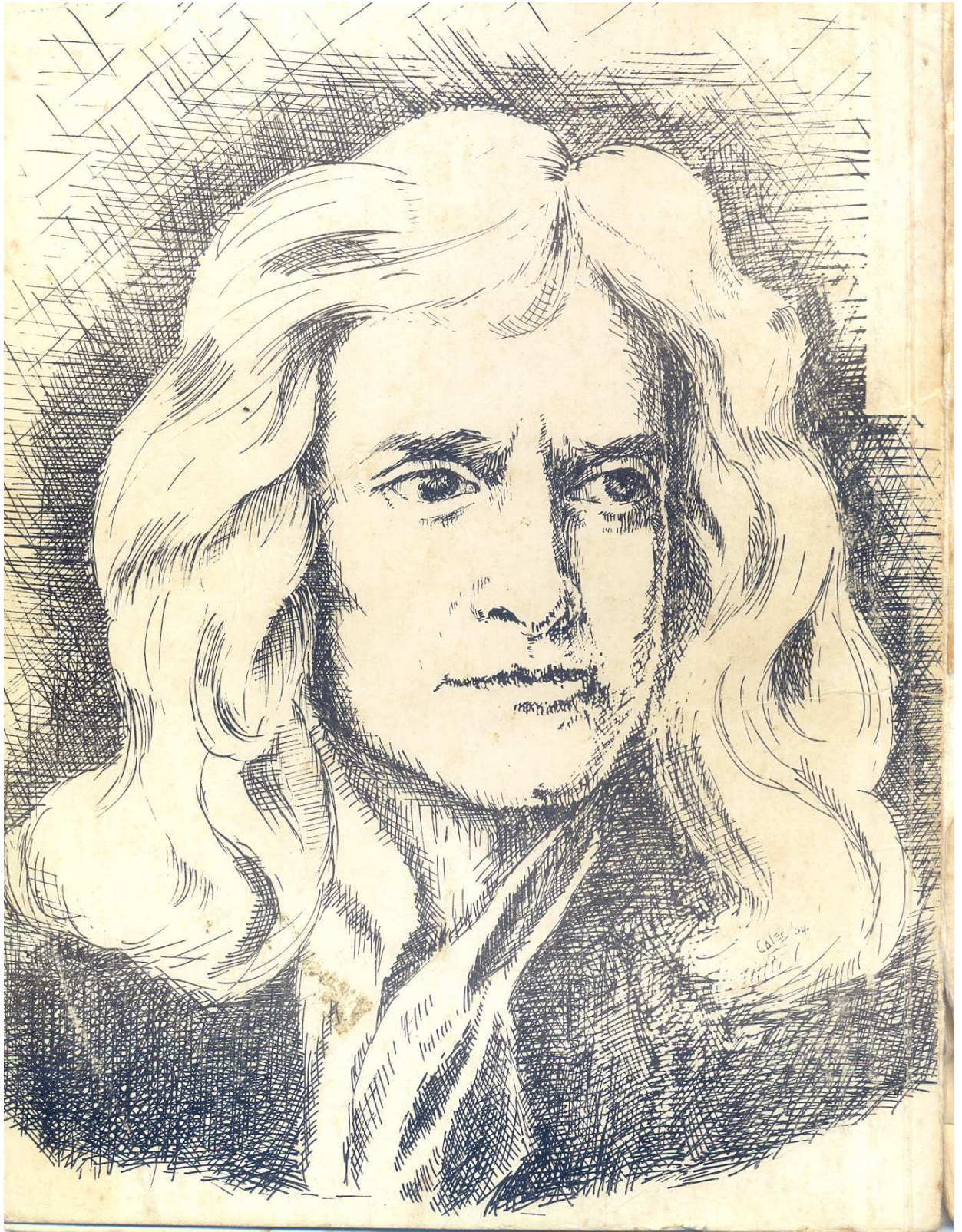




x^2		2
	x^2	
$\frac{x^4}{12}$?



Daniel Trujillo Ledezma



¡REPASA Y... PASA!

**QUIEN COMPLICLA LA
MATEMÁTICA ES PORQUE NO
LE GUSTA, ES UN SÁDICO
QUE SE DIVIERTE VIENDO
SUFRIR A SUS ALUMNOS.**

Julie César de Melle y Souza

DANIEL TRUJILLO LEDEZMA

ESCRITO POR: DANIEL TRUJILLO LEDEZMA

Reservados todos los derechos. Ni todo el libro ni parte de él, puede ser reproducido, archivado o transmitido en forma alguna o mediante algún sistema electrónico, mecánico de fotorreproducción, memoria o cualquier otro, sin permiso escrito del autor.

**Impreso en Colombia. Printed in Colombia
2009**

ÍNDICE

A MANERA DE PROLOGO

Se ha buscado con este material, que los estudiantes, principalmente aquellos que van a presentar **Pruebas de Estado**, exámenes de validación, o pruebas de ingreso en algún centro educativo, adquieran los conocimientos, destrezas y competencias mínimas, de matemáticas y física, que se supone maneja una persona que se halla o ha cursado el grado undécimo, esto es, maneje los estándares de calidad previstos y diseñados por el Ministerio de Educación Nacional. Lo anterior lo logramos, porque se trabaja mucho material del que produce el Icfes, en las diferentes áreas, con el nivel de exigencia propio de esta institución, y circunscrito a los ejes temáticos que ellos manejan en consonancia con el M.E.N.

De otra parte, también es un material muy útil para estudiantes universitarios que requieran elementos básicos de matemáticas elementales y de cálculo. La ventaja, el diseño empleado, que posibilita enfrentarse a los problemas, y posteriormente “discutir” la solución que se propone en el texto, de tal suerte, que cada estudiante propone su ritmo de trabajo y lo mejora con la práctica y el ejercicio.

La técnica de trabajo en verdad supone la celeridad para recuperar la información perdida o para conseguir aquella que nunca se tuvo, y para ello trabajaremos por unidades diferenciadas, en que inicialmente damos una teoría breve, luego unos ejercicios resueltos de la forma más detallada posible, y al final proponemos una serie de ejercicios con sus respectivas respuestas.

Si el lector ha manejado este tipo de información, la utilización de esta guía le servirá para recordar o refrescar aquellos conceptos que se

han ido olvidando, o para comprender y afianzar aquellos que nunca quedaron del todo claros.

Debe tenerse claridad total en que la información aquí contenida no debe considerarse suficiente. Sería triste idealismo pretender encerrar en unas cuantas páginas, el gran cúmulo de conocimientos, vivencias, competencias y valores que giran alrededor de la enseñanza básica y media en las áreas aquí tratadas. Lo que se ha hecho (y espero de resultado), es “arañar” aquí y allá, con el fin de ubicar en estas hojas, la información mínima que dote al estudiante de la herramienta, las competencias y los conocimientos básicos, con los cuales se pueda enfrentar a las Pruebas u otro tipo de evaluación similar, y salir airoso de ellas.

Excepto uno que otro, todos los ejercicios, “problemas” y cuestiones están resueltos detalladamente, pero, no sin antes invitar al lector a que se enfrente a ellos y esto le sirva de “medidor” y pueda ubicar sus vacíos conceptuales, insuficiencias y debilidades si es que las tiene ...

Todo el texto maneja el trabajo académico a manera de examen, con las técnicas aplicadas por el Icfes, SPN, buscando que el orientado repase tales técnicas además de que se empape un tanto, de los ejes conceptuales y la profundidad con que se trabajan las aludidas pruebas.

Los ejercicios que aparecen como propuestos, buscan que el estudiante aplique los conocimientos adquiridos y tome confianza en sí mismo. En la parte de soluciones aparecen las respuestas de todos los ejercicios propuestos.

Puede darse el caso (y no lo quisiera), que el estudiante, tras “intentar” resolver un ejercicio, no lo logre, y, “corra” de inmediato a mirar la solución y llegar así a la respuesta correcta. Siendo en su gran mayoría los ejercicios bastante fáciles, salvo algunos pocos, puede salir el estudiante con el estribillo: ¡Es facilísimo! ¿Ya me lo sé? ¡¡¡ Cuidado!!! Ver el ejercicio resuelto no significa que ya se comprenda, que ya se domine. Una guía con ejercicios resueltos puede convertirse

en un arna de doble filo, y, altamente peligrosa si no se maneja con seriedad, y, por qué no, con profesionalismo.

Si el educando, tras observar la solución de un problema, no asume la postura de un estudiante ACTIVO, (de papel y lápiz), cuando se vea enfrentado a una situación semejante, pero decisiva, sólo vendrán a su mente un montón de datos sin concordancia ni conexión intelectual alguna.

En la medida que orientadores y estudiantes se sirvan de este material y logren sacarle algún provecho que propenda a la superación del hombre, todo lo demás vendrá por añadidura, y me daré por bien servido.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mis agradecimientos al Señor Nelson García Rojas, por sus valiosas indicaciones y sus importantes sugerencias, las cuales fueron fundamentales en la elaboración de esta obra.

De igual manera, pondemos en alto relieve la colaboración de los estudiantes de Ingeniería Electrónica Mario Arturo González Sanclemente, quien diseñó la portada y Miguel Hernando Becerra, quien desinteresadamente me dio acceso a sus equipos para el procesado del texto inicial, a mi estudiante de la Institución Educativa Francisco José de Caldas, Jesús Armando Sandoval León, quien con la mayor paciencia y asumiendo este texto como si fuera suyo, colocó todo su saber en la digitación y gráficas de esta nueva edición, también mi gratitud para Rosa, quien pacientemente y diligentemente, “sufrió la traducción” de mi manuscrito.

A mi esposa Martha Lucía, que siempre me acompañó y mantuvo la paciencia “jobesca” para soportar todas las ausencias propias de este trabajo, a mis hijos, que debieron sacrificar el tiempo familiar para ver esta nueva edición...

Por último, más no por ello menos importante, doy gracias a todas aquellas personas cuyo estímulo fue vital para que esta guía pudiese hacerse y que de una u otra forma hicieron que este, mi modesto trabajo, se concluyese.

Daniel Trujillo Ledezma

TIPO DE PREGUNTAS

SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA - TIPO I

Estas preguntas utilizadas en todas las pruebas, se desarrollan en torno a una idea o a un problema y constan de un enunciado y cuatro opciones de respuesta. Se recomienda leer cuidadosamente el enunciado y, después de analizarlo, escoger entre las opciones la que se considera correcta.

SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA - TIPO IV

Estas preguntas utilizadas en las pruebas de historia, geografía, filosofía y violencia y sociedad, constan de un enunciado de cuatro posibles consecuencias, aplicaciones o condiciones relacionadas con el enunciado (numeradas de 1 a 4) y de cuatro opciones de respuesta (A, B, C, D), resultantes de cuatro posibles combinaciones así:

Si 1 y 2 son correctas, llene el óvalo	(A)
Si 2 y 3 son correctas, llene el óvalo	(B)
Si 3 y 4 son correctas, llene el óvalo	(C)
Si 2 y 4 son correctas, llene el óvalo	(D)

SELECCIÓN MÚLTIPLE CON MÚLTIPLE RESPUESTA VÁLIDA -TIPO X

Estas preguntas utilizadas en las pruebas de matemáticas (núcleo común) y lenguaje (profundización), constan de:

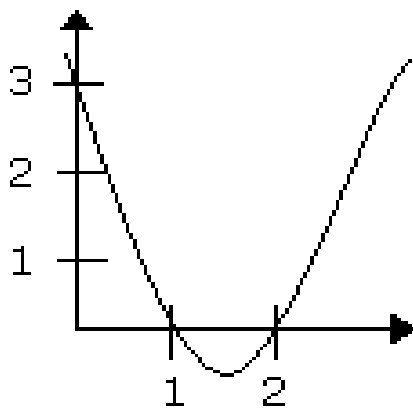
- Una situación, que puede ser una gráfica, una tabla, un texto o una combinación de ellos.
- Un enunciado problema, que puede estar dado en forma afirmativa o interrogativa.
- Cuatro opciones de respuesta.

Recuerde que puede encontrar varias opciones válidas para solucionar el enunciado problema; usted debe seleccionar entre estas opciones, sólo una, la que considere da repuesta de manera más precisa o estructurada, a las condiciones particulares de la situación en el contexto evaluado.

EJEMPLO

Se pide realizar la gráfica de la función ¿Es correcta la gráfica?
 $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

Ana realiza la siguiente:



- A. si porque el punto $(2,0)$ pertenece a la gráfica y $f(2) = 0$
- B. no, porque la gráfica no corresponde a una parábola y $f(x)$ sí
- C. si, porque el rango de la gráfica y la función tienen valores reales positivos
- D. no, porque el signo de la mayor potencia de $f(x)$ es negativo; luego su representación gráfica debe ir hacia abajo

En este ejemplo, la opción B y la D dan respuesta al problema, ya que ambas dan razones por las cuales la gráfica dibujada no corresponde a la función planteada en el enunciado; sin embargo, usted debe seleccionar sólo una, la opción que considere relaciona de manera más estructurada el concepto matemático, en este caso el concepto

de función cuadrática, con las condiciones particulares de la situación. La clave es la D, dado que en ésta se realiza un análisis más detallado de las características de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ en relación con la gráfica; por lo tanto, usted debe rellenar en su hoja de respuestas el óvalo correspondiente a la letra D.

“CUANDO LOS CONCEPTOS ESTÁN CLAROS TODOS LOS EJERCICIOS SON IGUALES”

RESUMENES

RESUMEN DE ARITMÉTICA

LEYES DE LA SUMA

☺ **LEY UNIFORME:** Al sumar varios números el resultado es uno y solo uno.

☺ **LEY ASOCIATIVA:** Si se asocian dos o más sumandos el resultado no se altera.

Eje:

$$5 + 3 + 8 = (5 + 3) + 8 = 5 + (3 + 8) = 16$$

☺ **LEY DISOCIATIVA:** Al efectuar la suma de varios números el resultado no se altera si se descompone uno o varios sumandos.

Eje:

$$5 + 4 + 3 = (3 + 2) + (3 + 1) + 3 = 5 + 4 + (1 + 1 + 1) = 12$$

MÚLTIPLO

Un número A es múltiplo de un número B si A contiene a B un número exacto y entero de veces.

Eje:

8 es múltiplo de 2 porque 8 contiene a 2 exactamente cuatro veces: esto es: $4 \times 2 = 8$.

NUMERO MIXTO

Es el que consta de un número entero y una parte fraccionaria.

Eje:

$$3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$$

CUADRADO DE UN NÚMERO

Es el resultado, que se obtiene al multiplicar una cantidad por sí misma.

Eje:

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

CUADRADO PERFECTO

Es toda cantidad que tiene raíz cuadrada exacta.

Eje:

$$\sqrt{225} = 15 \text{ Luego } 225 \text{ es cuadrado perfecto}$$

CUBO DE UN NÚMERO

Es el resultado de multiplicar tres factores iguales.

Eje:

$$8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$$

CUBO PERFECTO

Es toda cantidad que tiene raíz cúbica exacta.

Eje:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

CONJUNTO

Es una colección bien definida de objetos. Los elementos que forman el conjunto se llaman miembros o elementos del conjunto. Los conjuntos se notan con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas.

CONJUNTO VACIO

Es aquel que carece de elementos y se simboliza:

$$\{ \} \text{ ó } \emptyset.$$

CONJUNTO INFINITO

Conjunto al cual no se le pueden contar los elementos.

RELACIÓN

Es una correspondencia entre los elementos de un conjuntos o de éste con otro conjunto.

PROPOSICIÓN

Es una expresión que tiene sentido y la cual se le puede asignar un valor de verdad, esto es, decir si es verdadera o si es falsa.

NÚMERO PRIMO

Es aquel que tiene exactamente dos divisores, el propio número y la unidad.

NÚMERO COMPUESTO

Es todo aquel que no sea primo y sea diferente de cero o uno.

DIVISIBILIDAD

- ☺ **ENTRE 2:** Un número es divisible entre 2 si termina en cifra par o cero
- ☺ **ENTRE 3:** Un número es divisible entre 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- ☺ **ENTRE 4:** Un número es divisible entre 4 si sus dos últimas cifras son cero o forman un múltiplo de 4.
- ☺ **ENTRE 5:** Se puede dividir un número entre cinco si su última cifra es 0 o 5.
- ☺ **ENTRE 6:** Se puede dividir un número entre seis si es divisible entre 2 y entre 3.
- ☺ **ENTRE 7:** Se puede dividir un número entre siete la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 ó un múltiplo de 7.

MÁXIMO COMUN DIVISOR (M.C.D)

El M.C.D de dos o más números es el mayor número que puede dividirlos a todos exactamente. Se puede hallar descomponiendo los números en sus factores primos y formando el producto de los repetidos o comunes afectados por el menor exponente.

MINIMO COMUN MÚLTIPLO (M.C.M)

El M.C.M de dos o más números, es el menor número que contiene exactamente a cada uno de ellos. Se halla descomponiendo simultáneamente los números en sus factores primos, y hallando el producto de dichos factores.

CERO: Llamado identidad aditiva o módulo de la suma.

UNO: Llamado identidad multiplicativa o módulo de la multiplicación.

SUMA DE LOS PRIMEROS n NÚMEROS NATURALES:

$$\sum_{i=1}^n i = S = \frac{n(n+1)}{2}$$

SUMA DE LOS PRIMEROS n CUADRADOS:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SUMA DE LOS PRIMEROS n CUBOS:

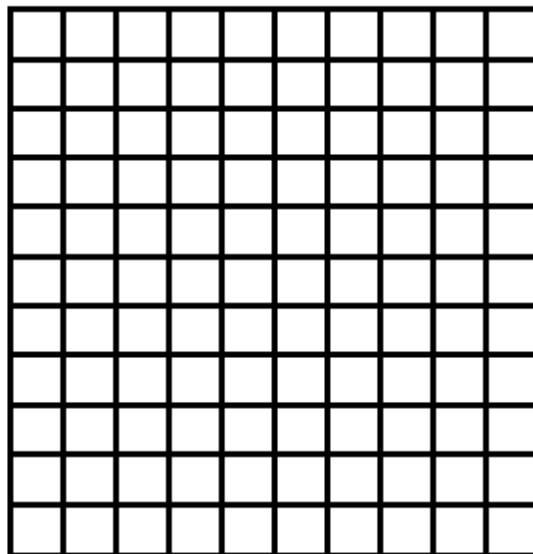
$$\sum_{i=1}^n i^3 = S = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARÍTMÉTICA

Todo entero positivo se puede representar como producto de factores primos de una forma única, salvo el orden.

ENIGMA

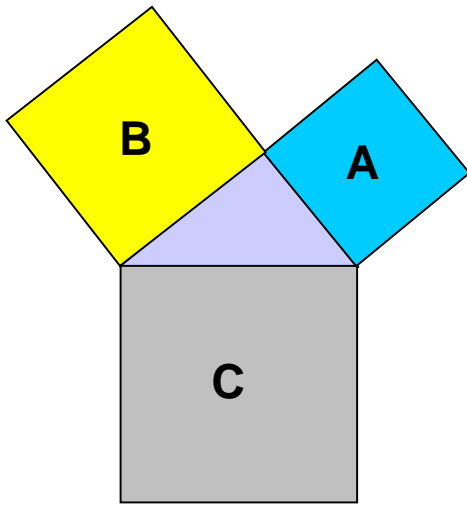
¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura?



RESUMEN DE ÁLGEBRA

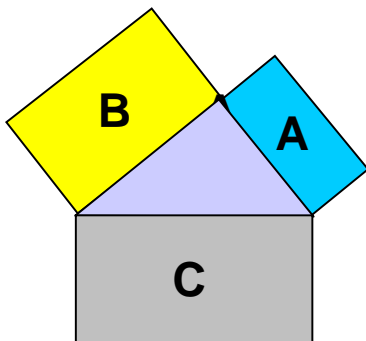
TEOREMA DE PITÁGORAS:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado levantado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados levantados en los catetos así:

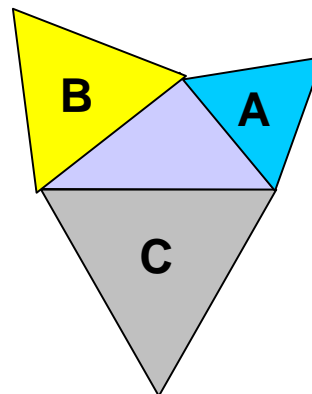


No solamente podemos levantar cuadrados sobre la hipotenusa, sino que también, rectángulos semejantes, triángulos equiláteros y semicircunferencias, hasta figuras irregulares y se conserva la misma propiedad de que el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras levantadas sobre los catetos, es decir se cumple en todos que:

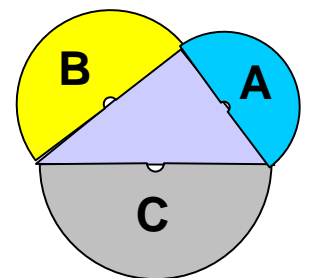
$$A + B = C$$



A, B y C son
rectángulos
semeiantes



A, B y C son
triángulos
equiláteros



A, B y C son
semicírculos

LEY DE LOS SIGNOS

MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
$+\cdot + = +$	$+\div + = +$
$+\cdot - = -$	$+\div - = -$
$-\cdot + = -$	$-\div + = -$
$-\cdot - = +$	$-\div - = +$

ECUACIÓN

Es una igualdad condicionada que se verifica sólo para algunos valores de la incógnita.

Eje:

$$3X - 5 = 2X + 10$$

$$3X - 5 + 5 = 2X + 10 + 5$$

$$3X = 2X + 15$$

$$3X - 2X = 2X - 2X + 15$$

$$X = 15$$

Solo se cumple para $X = 15$

OBSERVACIÓN: Si la ecuación se satisface para todos los valores que tome la variable recibe el nombre de identidad.

NOTA: En una ecuación hay dos miembros, el miembro de la izquierda $3X - 5$ (en este ejemplo) y el miembro de la derecha $2X + 10$, y los miembros están compuestos por términos, siendo en este caso $3X$ un término del miembro de la izquierda.

☺ **GRADO DE UNA ECUACIÓN**

Se trata del mayor exponente que pose la incógnita.

Eje:

$$5X^3 - 8X^2 + 7X - 11 = 0$$

El grado es 3.

☺ **TÉRMINOS SEMEJANTES**

Son aquellos que tienen las mismas letras, y las letras tienen los mismos exponentes. Los coeficientes numéricos no “importan”.

PRODUCTOS NOTABLES

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

CUADRADO DE UN BINOMIO

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

CUBO DE UN BINOMIO

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

SUMA DE CUBOS

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

CUBOS

DIFERENCIA DE

FACTORIZACIÓN

- ☺ **FACTOR COMUN:** Cuando los términos tienen al menos un factor común.

- ☺ **AGRUPACIÓN:** Cuando no hay factores comunes a todo termino, pero agrupando y operando se puede hallar factores comunes.
- ☺ **TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:** Consta de tres términos, de los cuales dos deben ser cuadrados perfectos, y el otro termino debe ser igual al doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos términos
Es la forma:
 $x^{2n} \pm 2x^n y^n + y^{2n}$ y factorizado queda: $(x^n \pm y^n)^2$
- ☺ **TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$:** Para factorizarlo, se buscan dos números cuya suma sea b y cuyo producto sea c.
 $x^2 + bx + c = (x + n)(x + m)$ con $b = n + m$ y $c = nm$.
- ☺ **TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + X(bc + ad) + cd$:**
Factorizando queda:
 $(ax + c)(bx + d)$
- ☺ **SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS:** su factorización es de la forma:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

CASO ESPECIAL PARA CUBOS:

$$a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$

CASO ESPECIAL PARA CUADRADOS:

$$a + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$$

Las dos situaciones anteriores son particularmente útiles al simplificar previa racionalización de expresiones algebraicas o en el cálculo de límites... Bien importante manejarlas.

POTENCIACIÓN, RADICACIÓN, EXPONECIACIÓN

LEYES DE LOS EXPONENTES

$$X^m * X^n = X^{m+n}$$

$$X^{m/n} = (X^m)^{1/n} = (X^{1/n})^m = \sqrt[n]{X^m}$$

$$\sqrt[a]{X} * \sqrt[a]{Y} = \sqrt[a]{XY}$$

$$\frac{\sqrt[a]{X}}{\sqrt[a]{Y}} = \sqrt[a]{\frac{X}{Y}}$$

$$(X^n)^m = X^{mn}$$

$$\frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$$

$$X^{-n} = \frac{1}{X^n}$$

$$X^0 = 1$$

Las últimas tres igualdades, con X diferente de cero.

ECUACIÓN CUADRÁTICA

☺ FORMULA PARA HALLAR LOS CEROS DE UNA ECUACIÓN DE LA FORMA $aX^2 + bX + c = 0$ CON $a \neq 0$.

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

☺ SUMA Y PRODUCTO DE LOS CEROS O RAÍCES DE LA ANTERIOR ECUACIÓN

$$X_1 + X_2 = -\frac{b}{a}$$

$$X_1 * X_2 = \frac{c}{a}$$

NÚMEROS IMAGINARIOS

Aquellos que representan una raíz par de un número negativo.

☺ UNIDAD IMAGINARIA

Definida como: $i = \sqrt{-1}$, cuyas potencias son:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -\sqrt{-1}$$

$$i^4 = -1$$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

$$\log_a B = c \text{ si y solo sí } a^c = B$$

$$\log(b * c) = \log b + \log c$$

$$\log_a B^c = c * \log_a B$$

$$\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$$

$$\log_a B^{1/c} = \frac{\log_a B}{c}$$

$$\log_a B * \log_B a = 1$$

$$\text{Log}_a a = 1$$

$$\log_x B = \frac{\text{Log}_a B}{\text{Log}_a x}$$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Es de la forma $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ en donde se tiene que:

$a_2 - a_1 = a_n - a_{n-1} = d$. “d” es la diferencia de la progresión y es constante.

$$n\text{-ésimo término} = a_n = a_1(n-1)d$$

$$\text{Suma de } n \text{ términos} = S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Es de la forma a_1, a_2, \dots, a_n donde $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$. "r" es una constante llamada razón.

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$
$$S_n = \frac{a_n * r - a_1}{r - 1}$$

MÉTODOS PARA SOLUCIÓN DE SISTEMA DE ECUACIONES

- ☺ Gráfico
- ☺ Sustitución
- ☺ Igualación
- ☺ Reducción o suma y resta
- ☺ Determinantes

**Existen tres tipos de personas:
Aquellas que se preocupan hasta la muerte,
las que trabajan hasta morir,
y las que se aburren hasta la muerte.**

Churchill winston

RESUMEN DE GEOMETRÍA

PERÍMETRO

Es la suma de las longitudes de los lados que conforman determinada región.

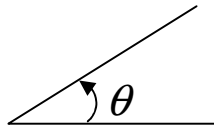
CONGRUENCIA

Dos figuras son congruentes si se pueden hacer coincidir en todos los puntos.

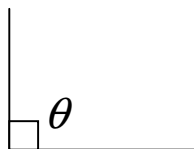
CLASIFICACIÓN DE LOS ANGULOS

1-.DE ACUERDO A SU AMPLITUD

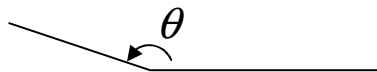
☺ **AGUDO:** cuando esta entre cero y noventa grados



☺ **RECTO:** mide noventa grados



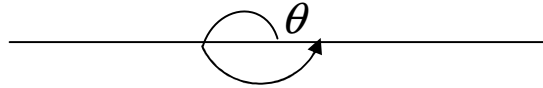
☺ **OBTUSO:** mide más de noventa grados pero menos de ciento ochenta grados.



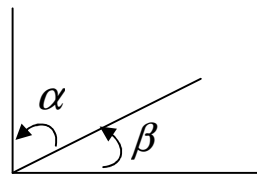
☺ **LLANO:** mide ciento ochenta grados.



☺ **DE UNA VUELTA:** mide 360 grados.

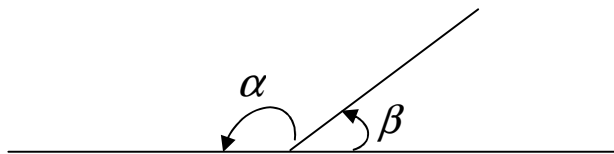


☺ **COMPLEMENTARIOS:** aquellos cuya suma es de 90 grados



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

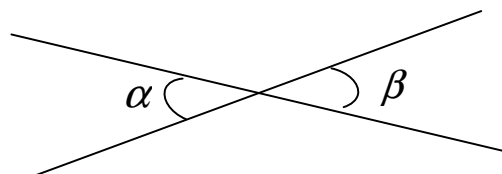
☺ **SUPLEMENTARIOS:** aquellos cuya suma es 180 grados



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

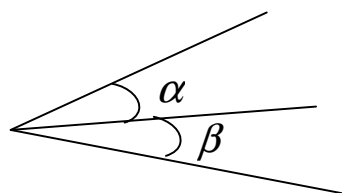
2.-DE ACUERDO A SU POSICIÓN

☺ **OPUESTOS POR EL VÉRTICE:** este tipo de ángulos son iguales.



$$\alpha = \beta$$

☺ **ADYACENTES:** tienen un lado común y un mismo vértice.



☺ **COLATERALES:** tienen un lado común y vértices diferentes.



MEDIDAS DE LOS ANGULOS

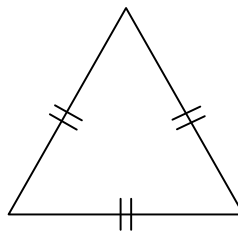
Contamos con dos sistemas básicos de medida:

- ☺ **SEXAGESIMAL:** cuya base es el grado sexagesimal (1°) que equivale a $1/360$ del ángulo de una vuelta. Se divide en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos.
- ☺ **CICLICO:** cuya base es el radian que equivale a un ángulo que subtiene a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.

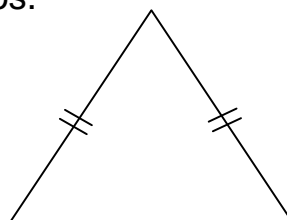
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

1.-DE ACUERDO A SUS LADOS:

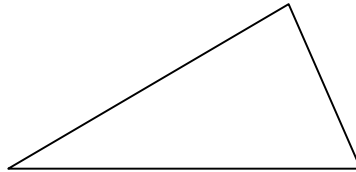
☺ **EQUILÁTERO:** tiene lados y ángulos iguales.



☺ **ISÓSCELES:** tiene dos lados iguales al igual que los ángulos opuestos a dichos lados.



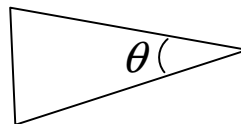
- ☺ **ESCALENO:** tiene los tres lados desiguales al igual que los ángulos.



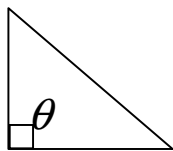
2.-DE ACUERDO A LOS ÁNGULOS:

- ☺ **ACUTÁNGULO:** tiene los ángulos agudos.

es un ángulo agudo

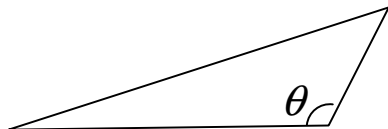


- ☺ **RECTÁNGULO:** tiene un ángulo recto.



θ es un ángulo recto

- ☺ **OBTUSÁNGULO:** tiene un ángulo obtuso.



θ es un ángulo obtuso

LINEAS PRINCIPALES DE UN TRIANGULO

- ☺ **MEDIANA:** segmento de recta que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto. El punto donde se cortan las medianas se llama **baricentro**.

- ☺ **BISECTRIZ:** segmento de recta que divide cada ángulo en partes iguales. En un triángulo, el punto donde se cortan las bisectrices se llama **incentro**.

- ☺ **MEDIATRIZ:** es la perpendicular que se levanta en el punto medio del lado de un triángulo. El punto en el que se cortan las mediatrices se llama **circuncentro**.

- ☺ **ALTURA:** es el segmento de recta trazado desde un vértice perpendicularmente al lado opuesto. El punto donde se cortan las alturas se llama **ortocentro**.

PUNTOS COLINEALES: tres o más puntos están alineados o son colineales, si hay una recta que los contenga a todos

PUNTOS COPLANÁRES: cuatro o más puntos son coplanares, si existe algún plano que los contenga a todos.

RECTAS COPLANARES: dos o más rectas son coplanares cuando están contenidas en el mismo plano.

TEOREMAS

- Una recta contiene al menos dos puntos.
- Un plano contiene al menos tres puntos no alineados.
- El espacio contiene al menos cuatro puntos no coplanares.
- Por dos puntos diferentes pasa una y solo una recta.
- Por tres puntos diferentes no colineales, pasa uno y solo un plano.
- Si dos planos distintos se cortan, su intersección es una recta.
- Si dos rectas distintas se cortan, su intersección es un solo punto.

POLÍGONOS

CLASIFICACIÓN DE ACUERDO A SU FORMA

- ☺ **CONVEXO:** es aquel cuyos ángulos interiores miden menos de 180° .
- ☺ **CÓNCAVO:** aquel que tiene uno o más ángulos interiores con más de 180° .
- ☺ **REGULAR:** aquel cuyos lados y ángulos son iguales.
- ☺ **SEMEJANTES:** son aquellos que sin tener el mismo tamaño tienen la misma forma.

CUADRILÁTEROS

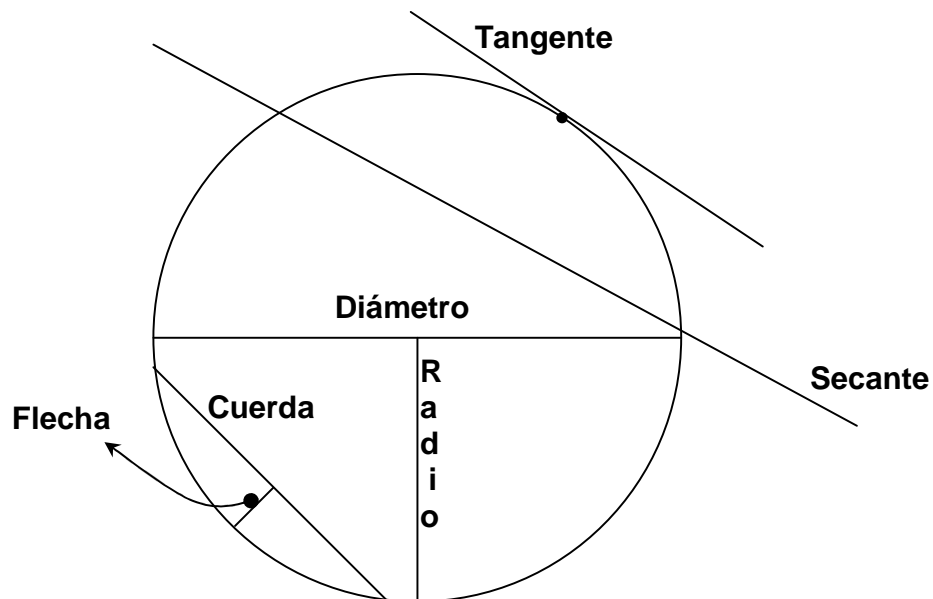
- ☺ **PARALELOGRAMO:** aquel que tiene sus lados opuestos iguales y paralelos. Se clasifican en:
 - ☺ **CUADRADO:** tiene todos sus lados y ángulos iguales.
 - ☺ **RECTÁNGULO:** el que tiene sus lados opuestos iguales y sus cuatro ángulos iguales.
 - ☺ **ROMBO:** es el que tiene sus cuatro lados iguales y sus ángulos opuestos iguales.
 - ☺ **TRAPECIO:** Aquel que tiene solamente dos lados opuestos paralelos. Se clasifican en:
 1. **Rectángulo:** tiene dos ángulos rectos.
 2. **Isósceles:** tiene iguales los lados no paralelos.
 3. **Escaleno:** tiene todos sus lados desiguales.

CIRCUNFERENCIA

Lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de otro interior llamado centro. Su longitud es: $2\pi R$, donde R es el radio, la distancia desde el centro a la periferia. El área del círculo que encierra es πR^2

LINEAS NOTABLES DE LA CIRCUNFERENCIA

- ☺ **RADIO:** Segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.
- ☺ **DIÁMETRO:** Segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro, equivale a dos radios.
- ☺ **CUERDA:** Segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- ☺ **FLECHA O SAGITA:** Parte del radio que une el punto medio de una cuerda con el arco respectivo.
- ☺ **ARCO:** Parte de la circunferencia.
- ☺ **SECANTE:** Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
- ☺ **TANGENTE:** Recta que "toca" a la circunferencia en un punto.



ANGULOS RELACIONADOS CON LA CIRCUNFERENCIA

- ☺ **CENTRAL:** aquel cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios de la misma. Su medida es igual a la del arco que subtienden sus lados.
- ☺ **INSCRITO:** su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma. Su medida es igual a la mitad del arco que subtiene sus lados.
- ☺ **SEMI-INSCRITO:** su vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus lados es una cuerda y el otro una tangente al punto donde está el vértice. Mide la mitad del arco que subtienden sus lados.
- ☺ **EXTERIOR:** Aquel cuyo vértice es un punto exterior a la circunferencia y sus lados son secantes. Su medida es igual a la semi-diferencia de los arcos que subtienden sus lados.
- ☺ **INTERIOR:** formado por dos secantes que se intersectan dentro de la circunferencia. Su medida es igual a la semisuma de los arcos que subtienden sus lados.

CÍRCULO

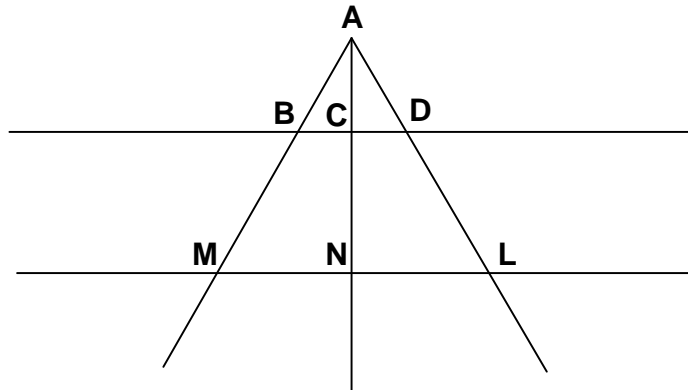
ELEMENTOS NOTABLES

- ☺ **SECTOR CIRCULAR:** porción de círculo limitada por dos radios y el arco.
- ☺ **SEGMENTO CIRCULAR:** parte del círculo limitada por una cuerda y su arco respectivo.

TEOREMA DE THALES

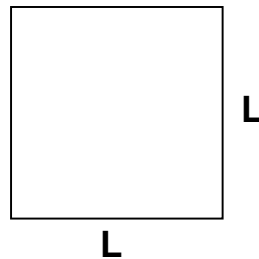
Dos paralelas cortadas por varias secantes que partan de un mismo punto, quedan divididas en partes proporcionales.

$$\frac{BC}{MN} = \frac{CD}{NL} = \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{AD}{AL}$$



ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

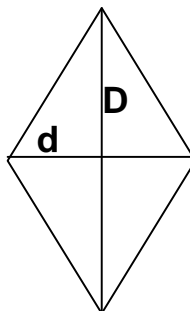
CUADRADO: $A = L^2$



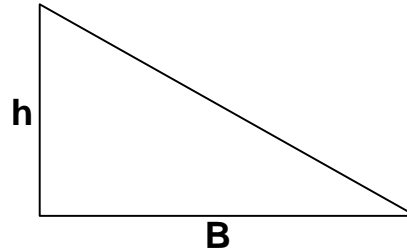
RECTÁNGULO: $A = \text{base} \times \text{altura} = B \times h$



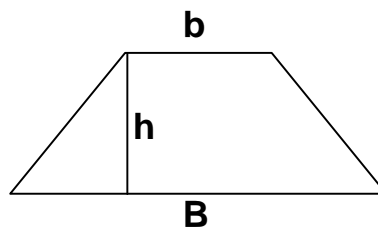
ROMBO: $A = \frac{D * d}{2}$



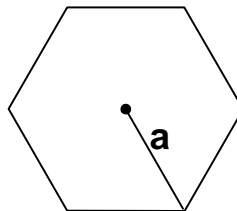
TRIÁNGULO: $A = \frac{B * h}{2}$



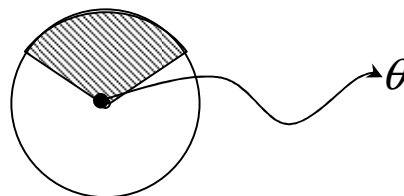
TRAPECIO: $A = \left(\frac{B+b}{2} \right) * h$



POLÍGONO REGULAR: $A = P * \frac{a}{2}$ donde: P = perímetro y a = apotema.



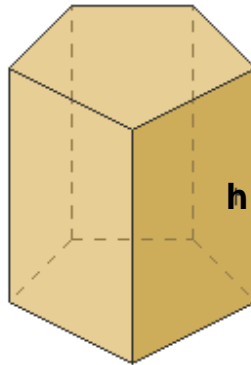
SECTOR CIRCULAR: $A = \frac{\pi R^2 * \theta}{360^\circ}$



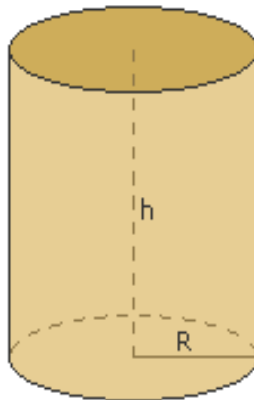
VOLÚMENES DE SÓLIDOS

☺ **PRISMA:** $V = B \times h$ donde $B = \text{área de la base}$

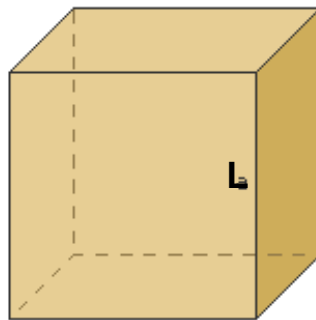
Prisma recto



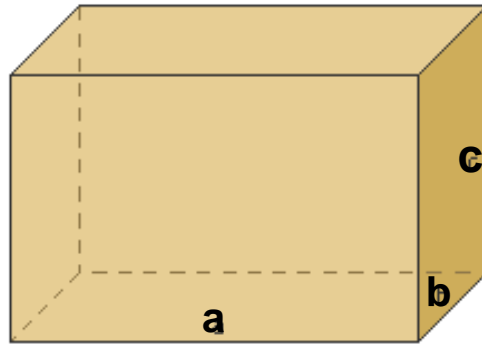
☺ **CILINDRO:** $V = \pi R^2 h$



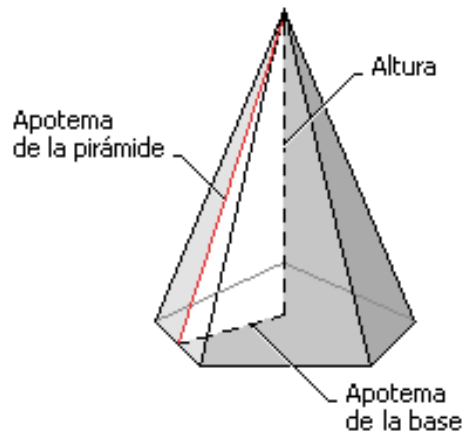
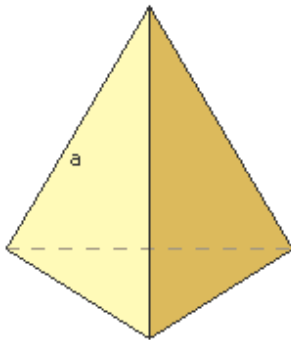
☺ **CUBO:** $V = L^3$



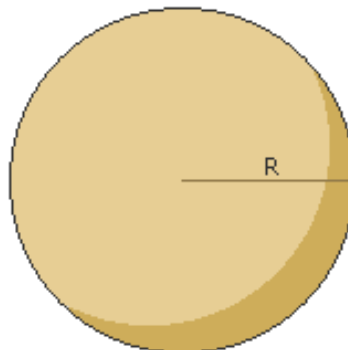
☺ **PARALELEPIPEDO:** $V = a \times b \times c$ (largo, ancho, alto)



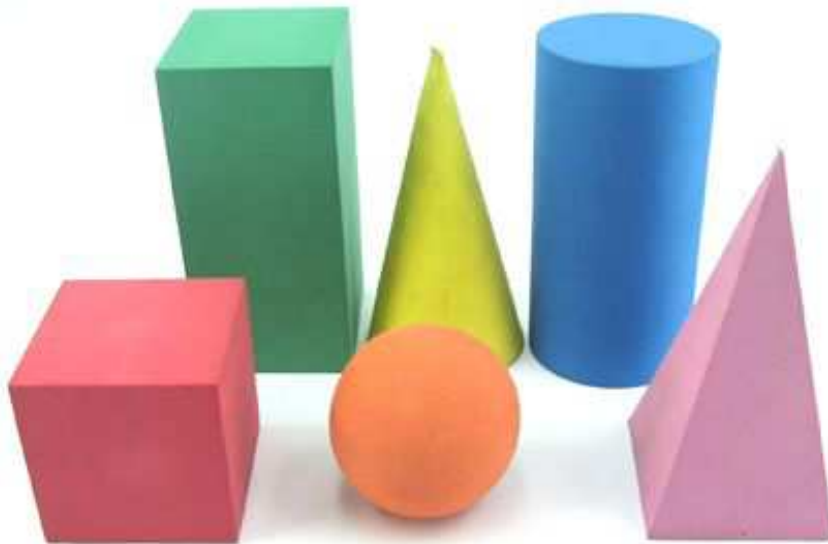
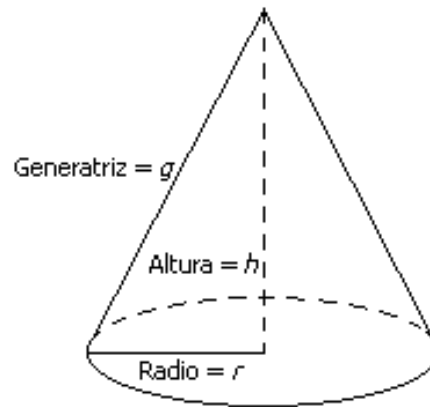
☺ **PIRÁMIDE:** $V = \frac{b \cdot h}{3}$, Donde b es el área de la base



☺ **ESFERA:** $\frac{4\pi R^3}{3}$



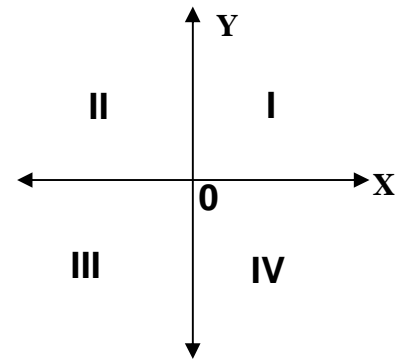
☺ CONO: $\frac{\pi R^2 h}{3}$



RESUMEN DE TRIGONOMETRÍA

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS SEGÚN EL CUADRANTE:

CUADRANTE FUNCIÓN	I	II	III	IV
SENO	+	+	-	-
COSENO	+	-	-	+
TANGENTE	+	-	+	-
COTANGENTE	+	-	+	-
SECANTE	+	-	-	+
COSECANTE	+	+	-	-



FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS DE ANGULOS NOTABLES

ANGULO	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
SENO	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
COSENO	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
TANGENTE	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0
COTANGENTE	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\infty$	0	∞
SECANTE	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
COSECANTE	∞	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	∞	-1	$-\infty$

NOTA: Para recordar el signo de las funciones trigonométricas en cualquiera de los cuadrantes, es bueno aprender la siguiente frase:

“TODOS SENTIMOS TANTAS COSAS”

Esto es, en el primer cuadrante todas son positivas, en el segundo son positivas el seno y su recíproca (cosecante), en el tercer cuadrante son positivas la tangente y su recíproca (cotangente), y en el cuarto cuadrante son positivas la función coseno y su recíproca (secante).

ANGULOS COFINALES

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

θ es un ángulo y n un numero entero positivo, negativo o cero.

$$\text{Sen}(\theta + n2\pi) = \text{Sen}\theta \quad \text{Csc}(\theta + n2\pi) = \text{Csc}\theta$$

$$\text{Cos}(\theta + n2\pi) = \text{Cos}\theta \quad \text{Sec}(\theta + n2\pi) = \text{Sec}\theta$$

$$\text{Tan}(\theta + n2\pi) = \text{Tan}\theta \quad \text{Cot}(\theta + n2\pi) = \text{Cot}\theta$$

FUNCIONES DE ANGULOS NEGATIVOS

$$\text{Sen}(-\theta) = -\text{Sen}\theta \quad \text{Csc}(-\theta) = -\text{Csc}\theta$$

$$\text{Cos}(-\theta) = \text{Cos}\theta \quad \text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$$

$$\text{Tan}(-\theta) = -\text{Tan}\theta \quad \text{Cot}(-\theta) = -\text{Cot}\theta$$

FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS INVERSAS

$$y = \text{arc Sen}X = \text{Sen}^{-1}X \quad \text{si y solo si} \quad \text{Sen}y = X$$

$$y = \text{arc Cos}X = \text{Cos}^{-1}X \quad \text{si y solo si} \quad \text{Cos}y = X$$

$$y = \text{arc Tan}X = \text{Tan}^{-1}X \quad \text{si y solo si} \quad \text{Tan}y = X$$

$$y = \text{arc Cot}X = \text{Cot}^{-1}X \quad \text{si y solo si} \quad \text{Cot}y = X$$

$$y = \text{arc Sec}X = \text{Sec}^{-1}X \quad \text{si y solo si} \quad \text{Sec}y = X$$

$$y = \text{arc Csc}X = \text{Csc}^{-1}X \quad \text{si y solo si} \quad \text{Csc}y = X$$

OJO

$$\text{Csc}(\text{arc Csc} \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arc Sen}(\text{Sen} \frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$$

La función directa anula la función inversa y viceversa.

IDENTIDADES BASICAS

$$\frac{\text{Sen } \theta}{\text{Cos } \theta} = \text{Tan } \theta$$

$$\frac{\text{Cos } \theta}{\text{Sen } \theta} = \text{Cot } \theta = \frac{1}{\text{Tan } \theta}$$

$$\frac{1}{\text{Sen } \theta} = \text{Csc } \theta$$

$$\frac{1}{\text{Cos } \theta} = \text{Sec } \theta$$

$$\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta = 1$$

$$1 + \text{Tan}^2 \theta = \text{Sec}^2 \theta$$

$$1 + \text{Cot}^2 \theta = \text{Csc}^2 \theta$$

IDENTIDADES PARA SUMA Y DIFERENCIA

$$\text{Sen } (a + b) = \text{Sen } a \text{ Cos } b + \text{Sen } b \text{ Cos } a$$

$$\text{Sen } (a - b) = \text{Sen } a \text{ Cos } b - \text{Sen } b \text{ Cos } a$$

$$\text{Cos } (a + b) = \text{Cos } a \text{ Cos } b - \text{Sen } a \text{ Sen } b$$

$$\text{Cos } (a - b) = \text{Cos } a \text{ Cos } b + \text{Sen } a \text{ Sen } b$$

$$\text{Tan } (a + b) = \frac{\text{Tan } a + \text{Tan } b}{1 - \text{Tan } a * \text{Tan } b}$$

$$\text{Tan } (a - b) = \frac{\text{Tan } a - \text{Tan } b}{1 + \text{Tan } a * \text{Tan } b}$$

IDENTIDADES PARA ÁNGULOS DOBLES

$$\text{Sen } 2a = 2\text{Sen } a \text{ Cos } a$$

$$\text{Cos } 2a = 2\text{Cos}^2 a - 1 = \text{Cos}^2 a - \text{Sen}^2 a = 1 - 2\text{Sen}^2 a$$

$$\text{Tan } 2a = \frac{2\text{Tan } a}{1 - \text{Tan}^2 a}$$

IDENTIDADES PARA ÁNGULOS MEDIOS

$$\text{Sen } \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{Cos } a}{2}}$$

$$\text{Cos } \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{Cos } a}{2}}$$

$$\text{Tan } \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{Cos } a}{1 + \text{Cos } a}}$$

IDENTIDADES PRODUCTO-SUMA

$$\text{Sen } a * \text{Sen } b = \frac{1}{2} [\text{Cos}(a - b) - \text{Cos}(a + b)]$$

$$\text{Cos } a * \text{Cos } b = \frac{1}{2} [\text{Cos}(a - b) + \text{Cos}(a + b)]$$

$$\text{Sen } a * \text{Cos } b = \frac{1}{2} [\text{Sen}(a - b) + \text{Sen}(a + b)]$$

IDENTIDADES SUMA / PRODUCTO

$$\text{Sen } a + \text{Sen } b = 2\text{Sen} \frac{(a+b)}{2} * \text{Cos} \frac{(a-b)}{2}$$

$$\text{Sen } a - \text{Sen } b = 2\text{Cos} \frac{(a+b)}{2} * \text{Sen} \frac{(a-b)}{2}$$

$$\text{Cos } a + \text{Cos } b = 2\text{Cos} \frac{(a+b)}{2} * \text{Cos} \frac{(a-b)}{2}$$

$$\text{Cos } a - \text{Cos } b = 2\text{Sen} \frac{(a+b)}{2} * \text{Sen} \frac{(a-b)}{2}$$

ECUACIONES TRIGONÓMETRICAS

Son ecuaciones en las que las incógnitas son funciones trigonométricas, y la solución consiste en hallar el valor de los ángulos que satisfacen la ecuación.

ÁNGULO DE ELEVACIÓN:

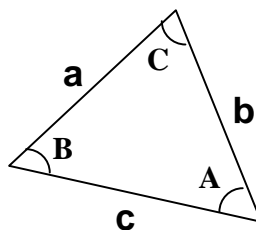
Es el que se forma con la horizontal al levantar la visual.

ÁNGULO DE DEPRESIÓN:

El que se forma con la horizontal al descender la visual.

LEY DE LOS SENOS

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

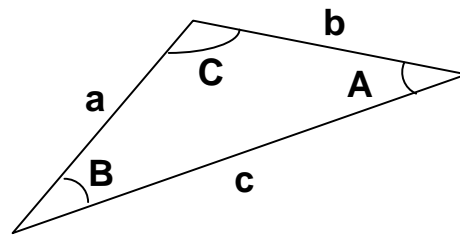
LEY DE LOS COSEENOS

En todo triángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

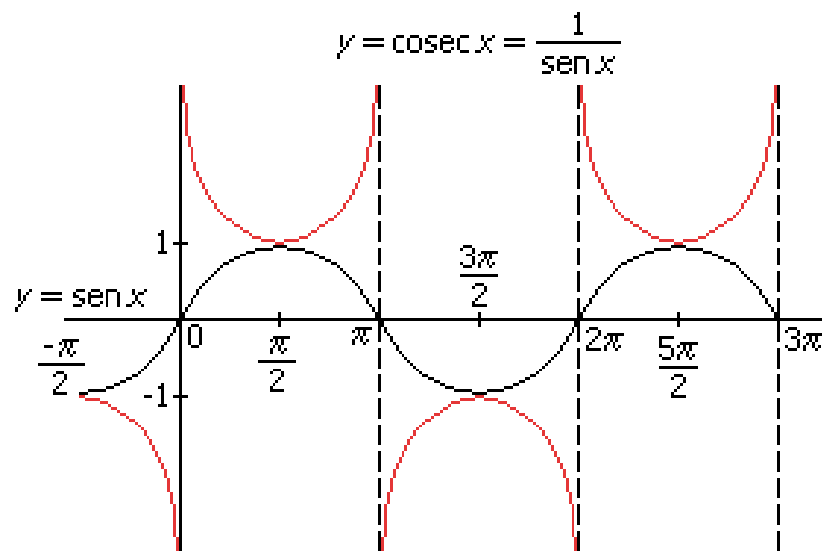
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

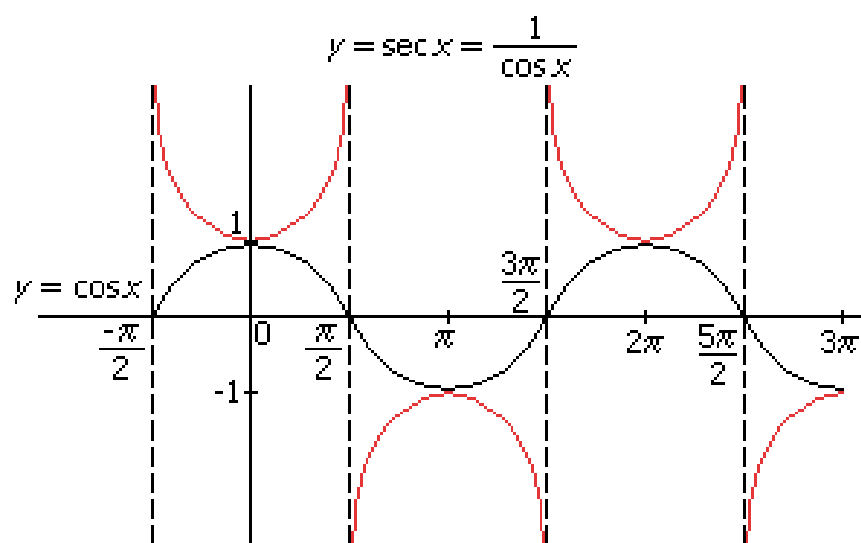


GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS

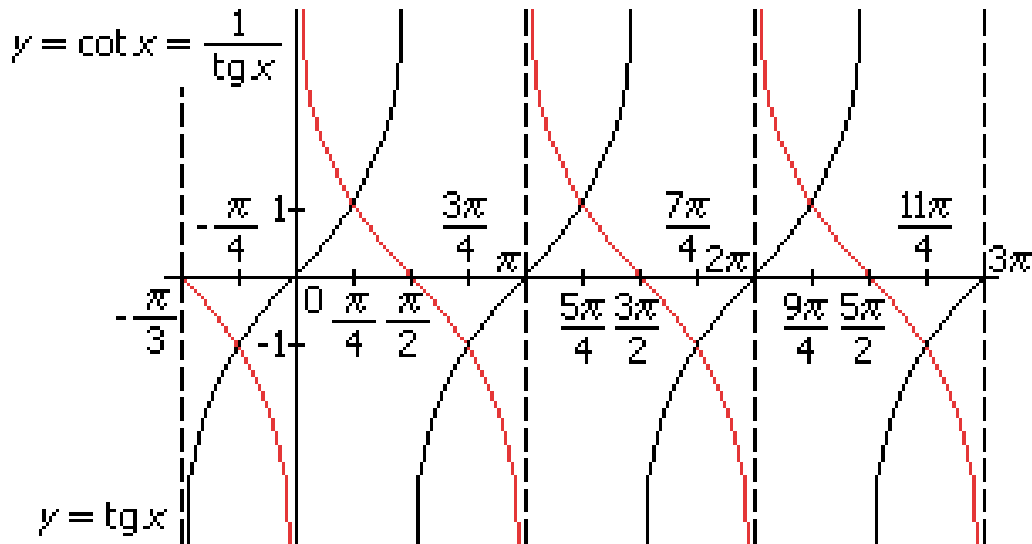
- **SENO - COSECANTE:**



- **COSENO - SECANTE:**



- TANGENTE - COTANGENTE:



Solo una parte muy pequeña de los jóvenes más capacitados escoge carreras científicas. Me quedo maravillado al ver que la capacidad y el entusiasmo es mucho mayor en los niños que acuden a las escuelas primarias que entre los muchachos de secundaria. Algo sucede durante los años escolares que les desalienta y les hace perder el interés... debemos comprender y paliar este peligroso desencanto. Albert Einstein se convirtió en científico, no gracias, sino a pesar de su escolarización.

Carl Sagan

RESUMEN DE CÁLCULO

INTERSECCIÓN

De dos o más conjuntos, es el conjunto formado por los elementos comunes a dichos conjuntos.

UNION

De dos o más conjuntos, es el conjunto formado por los elementos del conjunto "minuendo" que no están en el conjunto "sustraendo".


DIFERENCIA

De dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos del conjunto "minuendo" que no están en el conjunto "sustraendo".


COMPLEMENTO

Es el conjunto formado por los elementos del conjunto universal que no pertenecen al conjunto considerado.

INTERVALOS

• **INTERVALO CERRADO:**  =

$[a, b]$

• **INTERVALO ABIERTO:**  =

(a, b)

• **INTERVALO ABIERTO A LA IZQUIERDA:**  =

$(a, b]$

• **INTERVALO ABIERTO A LA DERECHA:**  =

$[a, b)$

DESIGUALDADES

$a > b$: a es mayor que b

$a < b$: a es menor que b

$a \geq b$: a es mayor o igual que b

$a \leq b$: a es menor o igual que b

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número, es el mismo número pero con signo positivo.

Por definición:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES:

$|x| \geq a$ si y solo si $x \geq a$ ó $x \leq -a$

$|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$

$|x| = a$ si y solo si $x = a$ ó $x = -a$

ALGUNAS INDETERMINACIONES

$$\frac{0}{0}; \infty - \infty; \frac{\infty}{\infty}; 1^\infty$$

NOTA: infinito no es un número.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ que define la distancia entre los puntos $P_1(X_1, Y_1)$ y $P_2(X_2, Y_2)$.

PENDIENTE

La pendiente de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 , esta dada por:

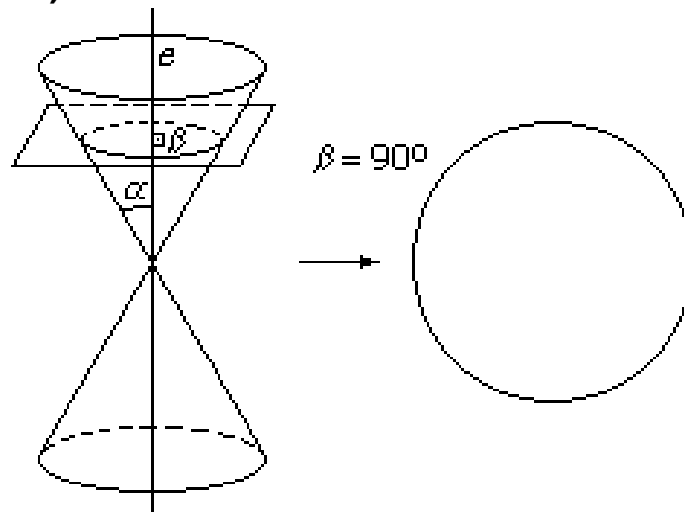
$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL ESPACIO

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

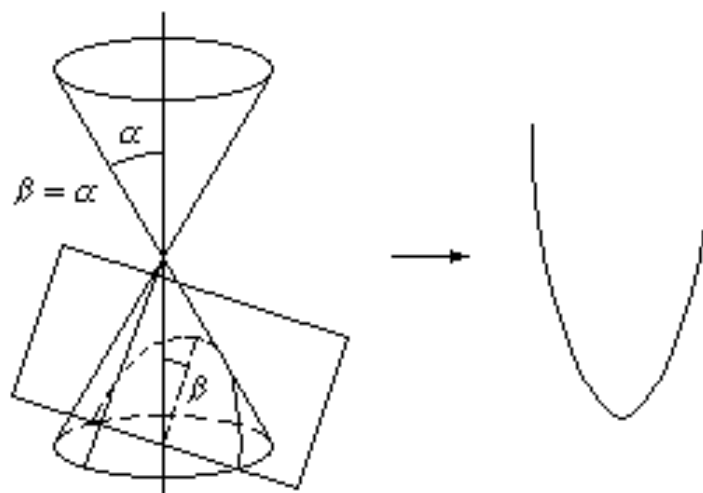
SECCIONES CONICAS

$(X - h)^2 + (Y - K)^2 = R^2$ circunferencia con centro en (h, K) y radio R .



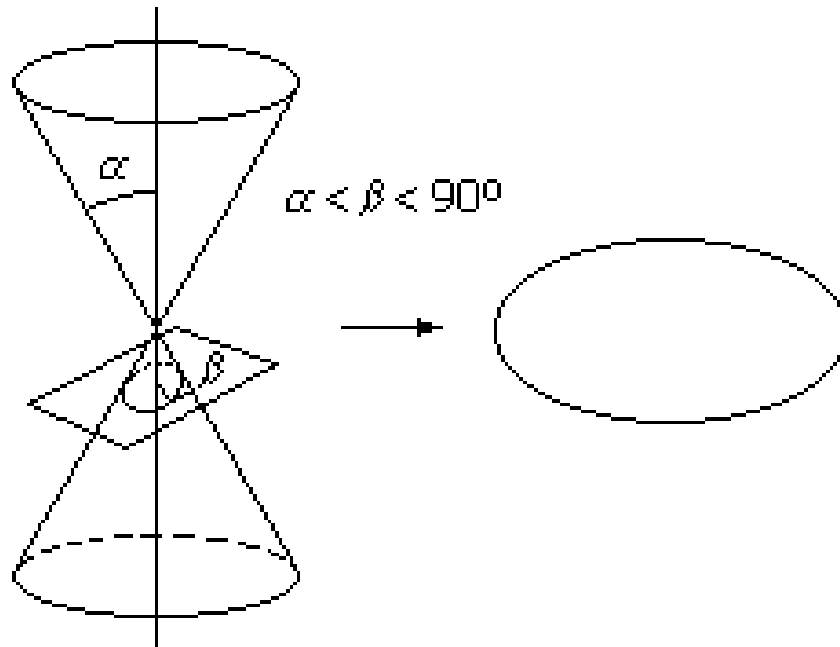
$(Y - K)^2 = \pm 4p(X - h)$ parábola con eje principal paralelo al eje X y vértice en (h, K) .

$(X - h)^2 = \pm 4p(Y - K)$ parábola con eje principal paralelo al eje Y .



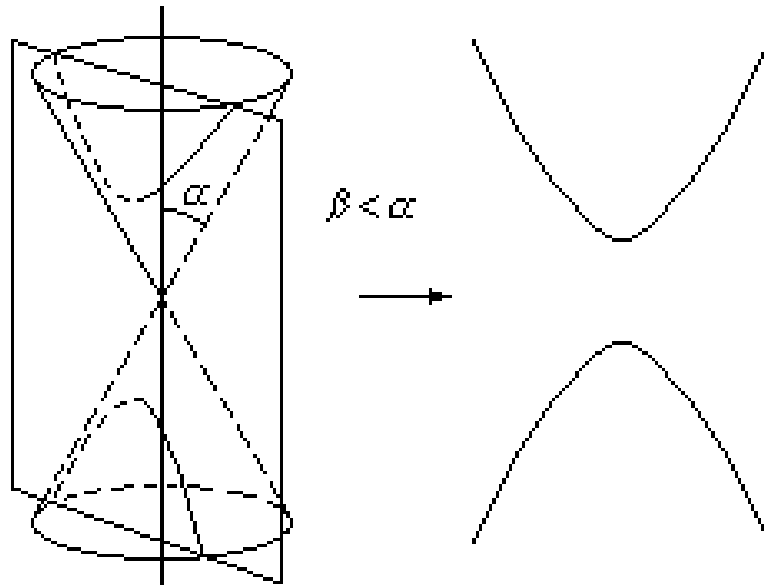
$\frac{(X-h)^2}{a^2} + \frac{(Y-k)^2}{b^2} = 1$ elipse con centro en (h, K) y eje mayor paralelo al eje X.

$\frac{(Y-k)^2}{a^2} + \frac{(X-h)^2}{b^2} = 1$ elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo al eje Y.



$\frac{(X-h)^2}{a^2} - \frac{(Y-k)^2}{b^2} = 1$ Hipérbola con centro en (h, K) y eje paralelo al eje X.

$\frac{(Y-k)^2}{a^2} - \frac{(X-h)^2}{b^2} = 1$ Hipérbola con centro en (h, K) y eje paralelo al eje Y.



LIMITES NOTABLES

$$1-. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x + a = 2a$$

$$2-. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + ax + a^2$$

$$3-. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } x}{x} = 1$$

$$4-. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{Cos } x}{x} = 0$$

$$5-. \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

$$6-. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$7-. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + X)^{1/x} = e$$

$$8-. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$

$$9-. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n \pm bx^{n-1} \pm \dots \pm d}{cx^n \pm px^{n-1} \pm \dots \pm f} = \frac{a}{c}$$

$$10-. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + x(b-a) - ab}{x^2 + x(c-a) - cb} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+b}{x+c} = \frac{a+b}{a+c}$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

1-. $\lim_{x \rightarrow a} Kf(x) = K \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ El factor constante K, se puede “sacar” del límite.

2-. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ El límite de una suma (o una resta), es igual a la suma (o resta) de los límites.

3-. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) * g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ El límite de un producto es igual al producto de los límites

4-. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) / g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ El límite de un cociente es igual al cociente de los límites, siempre que el denominador no sea cero.

5-. $\lim_{x \rightarrow a} (g(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)^n$ El límite de una potencia es equivalente a la potencia del límite

6-. Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, entonces el límite existe En este caso, el límite existe si los límites laterales existen y son iguales

7-. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ El límite de una raíz es igual a la raíz del límite

Y como decía un estudiante de ingeniería, con más de poeta que de ingeniero...” Mi amor no tiene límites, pero...Limita con tu cuerpo”.

DERIVADAS NOTABLES

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = kx \Rightarrow f'(x) = K$$

$$f(x) = kX^n \Rightarrow f'(x) = knX^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{X^n}{K} \Rightarrow f'(x) = \frac{nX^{n-1}}{K}$$

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

$$f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n(g'(x))[g(x)]^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{X^n} \Rightarrow f'(x) = \frac{-n}{X^{n+1}}$$

$$f(x) = \ln X \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{X}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \text{Sen } X \Rightarrow f'(x) = \text{Cos } X$$

$$f(x) = \text{Cos } X \Rightarrow f'(x) = -\text{Sen } X$$

$$f(x) = \text{Tan } X \Rightarrow f'(x) = \text{Sec}^2 X$$

$$f(x) = \text{Cot } X \Rightarrow f'(x) = -\text{Csc}^2 X$$

$$f(x) = \text{Sec } X \Rightarrow f'(x) = \text{Tan } X \text{ Sec } X$$

$$f(x) = \text{Csc } X \Rightarrow f'(x) = -\text{Cot } X \text{ Csc } X$$

$$f(x) = \text{arcSen } X \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$f(x) = \text{arcCos } X \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$f(x) = \text{arcTan } X \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+X^2}$$

$$f(x) = \text{arcCot } X \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+X^2}$$

$$f(x) = \text{arcSec } X \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{X\sqrt{X^2-1}}$$

$$f(x) = \text{arcCsc } X \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{X\sqrt{X^2-1}}$$

INTEGRALES

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

$$1^a \int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$2^a \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

INTEGRALES NOTABLES

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \text{Ln} x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \log_a e dx = \log_a x + C$$

$$\int a^x \text{Ln} a dx = a^x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{x} + C$$

$$\int \text{sen } x dx = -\text{cos } x + C$$

$$\int \text{cos } x dx = \text{sen } x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + C$$

$$\int \frac{-1}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cot } x + C$$

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} dx = \text{sec } x + C$$

$$\int \frac{-\text{cos } x}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cosec } x + C$$

$$\int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln} f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e dx = \log_a f(x) + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) \text{Ln} a dx = a^{f(x)} + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f(x)} + C$$

$$\int \text{sen } f(x) \cdot f'(x) dx = -\text{cos } f(x) + C$$

$$\int \text{cos } f(x) \cdot f'(x) dx = \text{sen } f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg } f(x) + C$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = \text{cot } f(x) + C$$

$$\int \frac{\text{sen } f(x)}{\cos^2 f(x)} f'(x) dx = \text{sec } f(x) + C$$

$$\int \frac{-\text{cos } f(x)}{\text{sen}^2 f(x)} f'(x) dx = \text{cosec } f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \cot gx + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \sec x + C$$

$$\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosec} x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arcsen f(x) + C$$

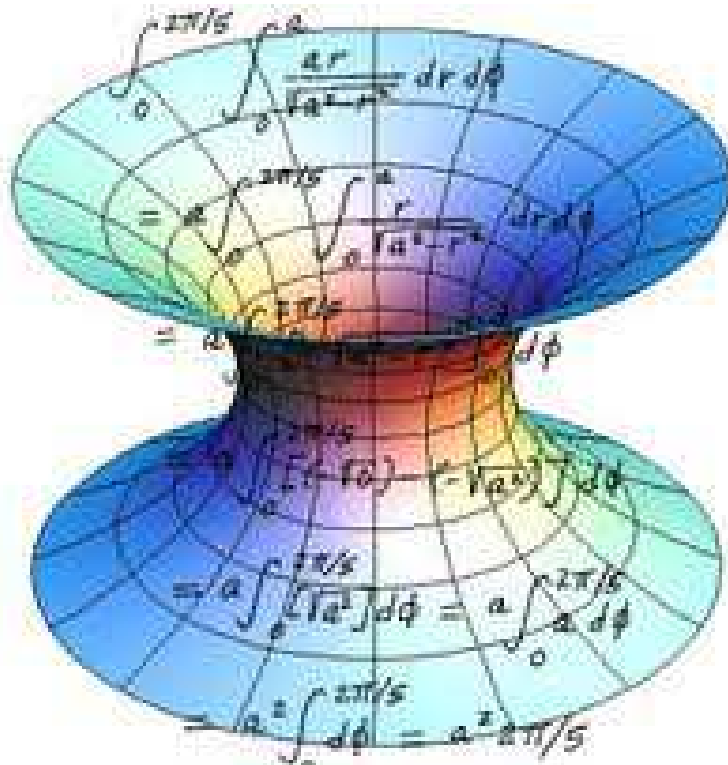
$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arccos f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

$$\int \frac{-f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \operatorname{arc} \cot gf(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2-1}} = \operatorname{arc} \sec f(x) + C$$

$$\int \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)^2-1}} = \operatorname{arccosec} f(x) + C$$



Tomado de :

https://www.google.com.co/search?q=integrales+y+aplicaciones&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=Y8PpUrHiOYaUkQeN0IBA&sqi=2&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1163&bih=809#facrc=_&imgdii=_&imgcr=80-wKQJkXCkd6M%253A%3BICeP6b1dilaZxM%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.grafton.es%252Fimagenes%252Fintegrator.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fwww.grafton.es%252Fderivadas.htm%3B250%3B255

RESUMEN DE FÍSICA

CINEMÁTICA

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME (MRU)

$$x = vt + x_0 \quad \text{Con } V = \text{velocidad constante}$$

T = Tiempo
X = Posición
X₀ = Posición inicial

En el MRU la aceleración vale cero

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

$$1-. x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad v_0 = \text{velocidad inicial}$$

$$2-. V^2 = V_0^2 + 2ax \quad a = \text{aceleración}$$

$$3-. V = at + v_0$$

$$V_m = \text{Velocidad media} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$$

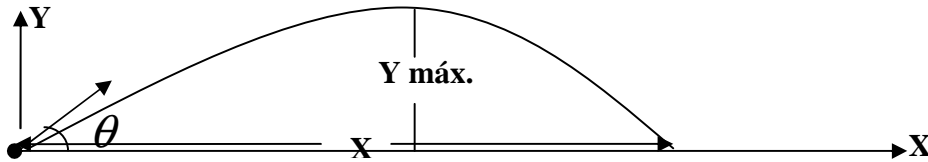
CAIDA LIBRE

$$1-. y = \frac{1}{2}gt^2 \quad y = \text{Espacio recorrido}$$

$$2-. V = gt \quad g = \text{aceleración de la gravedad}$$

V₀ = 0
y₀ = 0

ENIGMA: Una piedra que cayó de lo alto, recorrió 45 m en el último segundo de caída... ¿De qué altura cayó? Tome $g = 10 \text{ m/s}^2$

MOVIMIENTO PARABOLICO**EJE X (MRU)**

$$a_x = 0$$

$$V_x = v_0 \cos \theta$$

$$X = v_0 \cos \theta T_y$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

EJE Y (MRUA)

$$a_y = -g$$

$$V_y = -gt + v_0 \sin \theta$$

$$X = \frac{1}{2} g T_s^2 + v_0 \sin \theta T_s$$

Con:

T_s = tiempo de ascenso o subida;

T_v = tiempo de vuelo

$$2 t_s = t_v$$

PRIMERA CONDICION DE EQUILIBRIO

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0 \text{ (Equilibrio traslacional)}$$

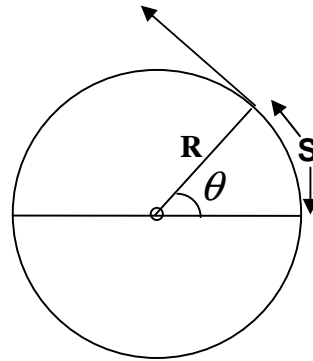
SEGUNDA CONDICION DE EQUILIBRIO

$$\sum \tau_0 = 0 \text{ (Equilibrio rotacional)}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

PERIODO (T): Tiempo empleado en completar un ciclo, en dar una vuelta completa, en ejecutar una revolución completa, etc.

FRECUENCIA (f): Se refiere al número de vueltas o revoluciones que se ejecutan en la unidad de tiempo. $f \cdot T = 1$ son recíprocos.

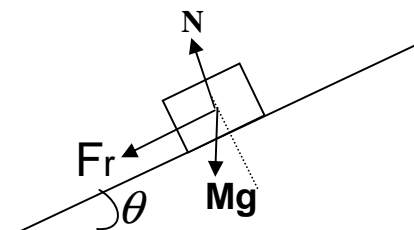
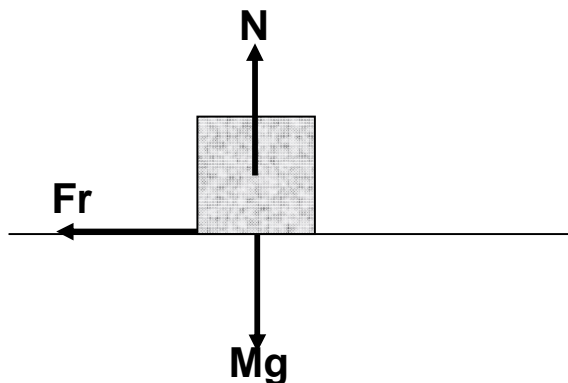


Velocidad lineal o tangencial: $V = \omega R$

Aceleración centrípeta: $a_c = \frac{V^2}{R}$

Posición angular: $\theta = \frac{S}{R}$

Velocidad angular: $\omega = \frac{V}{R}$

ESTÁTICA DE LA PARTICULA

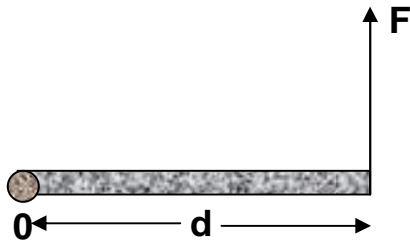
N = Fuerza normal

μ = coeficiente de rozamiento estático

F_r = fuerza de rozamiento

Mg = peso

ESTÁTICA DEL SÓLIDO



O = eje de giro

d = brazo de fuerza

F = fuerza aplicada

τ_0 = torque respecto a $O = Fd$

TRABAJO, POTENCIA Y ENERGÍA

Trabajo = W = fuerza x distancia

Potencia = $P = \frac{W}{T}$

Energía cinética = $\frac{1}{2}mV^2$

Energía potencial gravitacional = mgh : h = altura

Energía potencial elástica = $\frac{1}{2}kX^2$

CONSERVACION DE LA ENERGÍA

$E_{c_o} + E_{p_o} = E_{c_f} + E_{p_f}$ Sin rozamiento

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$$M_1V_{o1} + M_2V_{o2} = M_1V_1 + M_2V_2$$

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE (M.A.S.)

$$X = A \cos (WT + \varphi) \quad A = \text{amplitud}; W = \text{velocidad angular}$$

$$(WT + \varphi) = \text{fase}; \varphi = \text{fase inicial}$$

$$T = \text{periodo} = \frac{2\pi}{W}; \text{ frecuencia} = f = \frac{1}{T} = \frac{W}{2\pi}$$

$$V_{\max} = WA; \quad a_{\max} = W^2A$$

$$\text{Ecuación característica del MAS: } a = -W^2X$$

$$\text{Sistema masa-resorte: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad \text{Péndulo simple:}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Oscilador armónico:

$$\text{Energía} = E = \frac{1}{2}KA^2$$

K = constante del resorte
 m = masa suspendida
 L = Longitud
 g = aceleración de la gravedad

MOVIMIENTO ONDULATORIO

$$\text{Longitud de onda} = \lambda = VT = \frac{V}{f}$$

$$\text{Numero de onda} = K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{Densidad lineal} = \mu = \frac{m}{L} \quad \text{donde } L = \text{longitud}$$

Velocidad = $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ donde T = tensión

Ecuación de una onda = $Y = A \cos (WT - KX)$

ACUSTICA

I = intensidad; P = potencia; A = área

$$I = \frac{P}{A}$$

EFEECTO DOPPLER

$$\frac{F_o}{C \pm V_o} = \frac{F_f}{C \pm V_f}$$

Con

F_o = Frecuencia percibida

F_f = Frecuencia emitida

C = Velocidad del sonido en el aire (aprox 340 m/s)

V_o = Velocidad del observador

V_f = Velocidad de la fuente

NOTA: El efecto doppler también se puede aplicar a ondas electromagnéticas como en el caso de las ondas de luz.

LUZ

C = velocidad de la luz (en el vacío) = 3×10^8 m/s

n = índice de refracción

V = velocidad de la luz en el medio

$$n = \frac{C}{V}$$

LEY DE LA REFRACCIÓN: $n_i \text{Sen} i = n_r \text{Sen} r$

ESPEJOS

LEY DE LOS ESPEJOS ESFERICOS:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f}$$

Donde S = distancia objeto
 S' = distancia imagen
 f = foco = R/2
 R = radio

$$\text{Aumento lateral} = \frac{Y'}{Y} = -\frac{S'}{S}$$

Y' = tamaño de la imagen

Y = tamaño del objeto

LENTEs

$$\frac{n}{S} + \frac{n'}{S'} = \frac{n' - n}{R} \quad \text{donde } n \text{ y } n' \text{ son los índices de refracción de los medios por donde se traslada la luz.}$$

ECUACIÓN DEL CONSTRUCTOR DE LENTES

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \text{ para hallar el foco de una lente.}$$

ELECTRICIDAD:

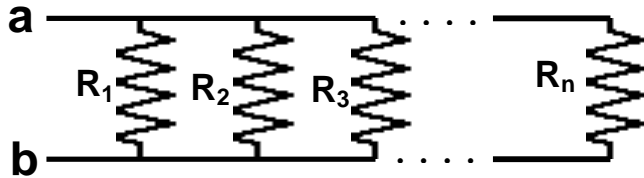
LEY DE OHM:

$$\boxed{V = I * R} \quad \text{con } V = \text{voltaje; } I = \text{intensidad; } R = \text{resistencia}$$

LEY DE JOULE

$$\boxed{P = V * I} \quad \text{con } P = \text{potencia}$$

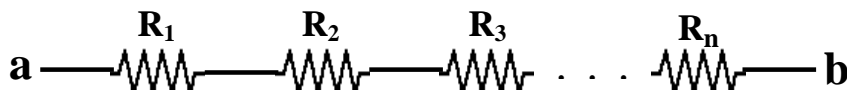
RESISTENCIAS EN PARALELO



Cuya resistencia equivalente es:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

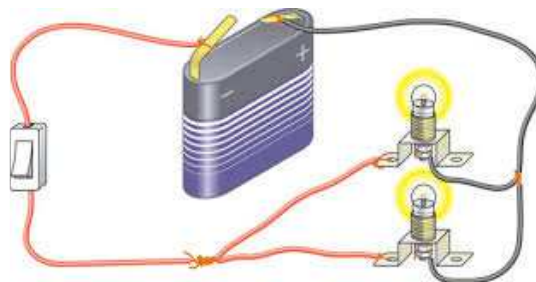
RESISTENCIAS EN SERIE



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

NOTA: para un circuito en paralelo, cuando se trate de dos resistencias, la resistencia equivalente se halla fácilmente aplicando la fórmula:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Tomado de:

https://www.google.com.co/search?q=circuito&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ei=GMTpUsL5AYLakQfn_YCQCA&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1163&bih=809#facrc=_&imgdii=_&imgsrc=Kmk8sTn5AKiugM%253A%253Bpl3b0JZYqDpAPM%253Bhttp%253A%252F%252Fexperimentoscaseros.wikispaces.com%252Ffile%252Fview%252FCircuit06.jpg%252F116937887%252FCircuito6.jpg%253Bhttp%253A%252F%252Fexperimentoscaseros.wikispaces.com%252FCircuito%252Bel%2525C3%2525A9ctrico%252Bcasero%253B555%253B286