SOLUCION AL TEST DE TRIGONOMETRIA

1- Para pasar de grados a radianes multiplicamos los grados dados por la expresión $\frac{\pi}{180°}$ luego: $135° = \frac{135°\pi rad}{180°} = \frac{3\pi rad}{4}$ Respuesta la A.

2- $270° = 270° * \frac{\pi rad}{180°} = \frac{3\pi rad}{2}$ Respuesta la A.

3- Aplicando la función de seno:

$Sen30° = x/2$ $\quad x = 2sen30° = 2*1/2 = 1$ $\quad x = 1$ Respuesta la A.

4- Aplicando la función tangente:

$Tan60° = y/3$ $\quad y = 3\tan 60°$ $\quad y = 3*\sqrt{3} \approx 5,2$ Respuesta la D.

5- El coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento, como el ángulo es 30° el complemento será 60°. Luego, cos30° = sen60°. Respuesta la D.

6- $Sen(60° - \pi) = sen60° \cos\pi - sen\pi \cos 60°$ $\quad sen(60° - \pi) = -sen60°$ Respuesta la B.

7- $Cos(\pi - x) = \cos\pi\cos x + sen\pi senx$ pero $\cos\pi = -1$ y $sen\pi = 0$ $\quad \cos(\pi - x) = -\cos x$ Respuesta la B.

8-

$$\boxed{\begin{array}{l} Tan60° = \frac{h}{x} \qquad Tan30° = \frac{h}{x+100} \\ h = x\tan 60° \quad y \quad h = (x+100)\tan 30° \end{array}}$$

Igualando: xtan60°= xtan30° + 100tan30°

xtan60° - xtan30° = 100tan30°

x(tan60° - tan30°)

$$x = \frac{100\tan 30°}{\tan 60° - \tan 30°} = \frac{100*1,732}{1,15} = 150,6$$

Como h = xtan60° h = 150,6 * 1,732 = 87,64 m. Respuesta la C.

9- Cosa $= \sqrt{(1 - sen^2 a)} = \sqrt{(1 - 9/25)} = \sqrt{(16/25)}$ $\quad \cos a = 4/5$

$$\text{Sen}\beta = \sqrt{(1-\cos^2\beta)} = \sqrt{(1-225/289)} = \sqrt{(64/289)} = 8/17$$

Como: cos(a – β) = cosacosβ + senasenβ nos queda:

$$\text{Cos}(a-\beta) = \frac{4}{5} * \frac{15}{17} + \frac{3}{5} * \frac{8}{17} = \frac{60}{85} + \frac{24}{5}$$

$$\text{Cos}(a-\beta) = \frac{84}{85}$$ Respuesta la C.

10-Sabemos que $\cos a = \sqrt{(1-\text{sen}^2 a)} = \sqrt{\left(1-(8/17)^2\right)} = \sqrt{(1-64/289)} = \sqrt{(225/289)}$

$\cos a = \dfrac{15}{17}$ como $\tan a = \dfrac{\text{sen}a}{\cos a}$ $\tan a = \dfrac{8/17}{15/17} = \dfrac{8}{15}$ Respuesta la E.

11- Se deja como ejercicio al lector “experimentar” que la respuesta es la D.

12- Senx * Secx = $\text{Senx} * \dfrac{1}{\cos x}$ = tanx. Respuesta la C.

13- $\text{Secx} - \text{Cosx} = \dfrac{1}{\cos x} - \cos x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \text{senx} * \dfrac{\text{senx}}{\cos x} = \text{senx}\tan x$

Respuesta la B.

14- $\text{Tan}^2 x = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{1-\text{sen}^2 x}$ Respuesta la A.

15- $\text{Sec}^2 x$ - $\text{Csc}^2 x$ = 1 + $\tan^2$ – (1 + $\cot^2$) = 1+ $\tan^2 x$ – 1 - $\text{Cot}^2 x$ = $\text{Tan}^2 x$ - $\cot^2 x$

Respuesta la C.

16- $\dfrac{1}{\tan^2 x+1} = \dfrac{1}{\sec^2 x} = \cos^2 x = 1-\text{sen}^2 x = (1-\text{senx})(1+\text{senx})$ Respuesta la B.

$$17\text{-}\quad \frac{\text{Tan}^2x - \text{Sen}^2x}{\text{Cot}^2x - \text{Cos}^2x} = \frac{\dfrac{\text{Sen}^2x}{\text{Cos}^2x} - \text{Sen}^2x}{\dfrac{\text{Cos}^2x}{\text{Sen}^2x} - \text{Cos}^2x} = \frac{\dfrac{\text{Sen}^2x - \text{Sen}^2x\text{Cos}^2x}{\text{Cos}^2x}}{\dfrac{\text{Cos}^2x - \text{Cos}^2x\text{Sen}^2x}{\text{Sen}^2x}}$$

$$=\frac{Sen^2x\left(Sen^2x-Sen^2xCos^2x\right)}{Cos^2x\left(Cos^2x-Cos^2xSen^2x\right)}=\frac{Sen^2x*Sen^2x\left(1-Cos^2x\right)}{Cos^2x*Cos^2x\left(1-Sen^2x\right)}=\frac{Sen^4x*Sen^2x}{Cos^4x*Cos^2x}$$

$$=\frac{Sen^6x}{Cos^6x}=Tan^6x$$ Respuesta la C.

18- $1 - \tan^4 x = (1 – \tan^2 x) (1 + \tan^2 x) = (1 - (\sec^2 x - 1)) (\sec^2 x)$

$= (2 - \sec^2 x) (\sec^2 x) = 2\sec^4 x - \sec^4 x$. Respuesta la C.

19- $\frac{Tanx+1}{Tanx}=\frac{Tanx}{Tanx}+\frac{1}{Tanx}=1+\cot x$ Respuesta la C.

20- $$\frac{\left(\cos^2 x-sen^2x\right)^2}{\cos^4 x-sen^4x}=\frac{\left(\cos^2 x-sen^2x\right)^2}{\left(\cos^2 x-sen^2x\right)\left(\cos^2 x+sen^2x\right)}=\frac{\cos^2 x-sen^2x}{1}$$

$=\left(1-sen^2x\right)-sen^2=1-2sen^2x$ Respuesta la C.

21- $$\frac{3-2senx\cos x}{1-4sen^2x\cos^2 x}=\frac{3-2senx\cos x}{(1-2senx\cos x)(1-2senx\cos x)}=\frac{3-sen2x}{(1-sen2x)(1+sen2x)}$$

$\frac{3-sen2x}{1-sen^2 2x}=\frac{3-sen2x}{\cos^2 2x}$ Respuesta la E.

22- $$\frac{Sen5x-Sen3x}{Cos5x+\cos 3x}=\frac{2Cos\left((5x+3x)/2\right)Sen\left((5x-3x)/2\right)}{2Cos\left((5x+3x)/2\right)Cos\left((5x-3x)/2\right)}=\frac{Senx}{Cosx}=Tanx$$

Respuesta la C.

23- $$\frac{Sen7x+Sen5x+Sen3x+Senx}{Cos7x+Cos5x+Cos3x+Cosx}=$$

$$\frac{2Sen\left((7x+x)/2\right)Cos\left((7x-x)/2\right)+2Sen\left((5x+3x)/2\right)Cos\left((5x-3x)/2\right)}{2Cos\left((7x+x)/2\right)Cos\left((7x-x)/2\right)+2Cos\left((5x+3x)/2\right)Cos\left((5x-3x)/2\right)}=\frac{Senx}{Cosx}=Tanx$$

$$\frac{Sen4xCos3x+Sen4xCosx}{Cos4xCos3x+Cos4xCosx}=\frac{Sen4x\left(Cos3x+Cosx\right)}{Cos4x\left(Cos3x+Cosx\right)}=\frac{Sen4x}{Cos4x}=Tan4x$$

24- $3Tanx+3Cotx = 4\sqrt{3} \Rightarrow 3Tanx+\frac{3}{Tanx}-4\sqrt{3}=0 \Rightarrow 3Tan^2x-4\sqrt{3Tanx+3}=0$

Aplicando la formula de la ecuación cuadrática:

$$\text{Tanx} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{(48-36)}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Tanx} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3} : \ \text{Tanx}_1 = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow x_1$$

$$\text{Tanx}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 30°, 210°$$

Luego el valor de x para $0 \leq x \leq 30°$ es 16° 6' 7''. Respuesta la E.

25- $3\text{Cos}^2 x$ - 5Senx + 1/4 = 0 : → $12\text{Cos}^2 x$ - 20Senx + 1 = 0

$12(1 – \text{Sen}^2 x)$ - 20senx + 1 = 0: 12 - $12\text{sen}^2 x$ - 20senx + 1 = 0

$12\text{sen}^2 x$ + 20senx - 13 = 0. Aplicando la formula de la ecuación cuadrática hallamos que: $\text{senx}_1 = 0,5$ ó $\text{senx}_2 = -2,16$

$\text{Senx}_2 = -2,16$ no tiene sentido. Luego $\text{Senx}_1 = 0,5$ $x_1 = \text{arcsen}0,5$

$x_1 = 30°$; $x_1 = 150$. Luego x = 30° ó x = 150°. Respuesta la C.

26- $\text{Secx} = \sqrt{2}\ \tan x \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}\ \frac{\text{senx}}{\cos x} = 1\sqrt{2}\,\text{senx}.$ $\text{senx} = \sqrt{2/2}$

De donde $x = \text{arcsen}\sqrt{2/2}$: $x = 45°$ ó $x = 135°$ Respuesta la A.

27- $3\text{Tanx} = 4\text{Senx}$ $\frac{3\text{senx}}{\text{cosx}} = 4\text{Senx}$ $= \frac{3}{4} = \cos x$, $x = \arccos 3/4$

$x = 41°24'34''$ ó $x = 318°35'25''$. Respuesta la E.

28- Cos2x - senx = 0 $(1 - 2\text{sen}^2 x)$ – senx = 0 1 - $2\text{sen}^2 x$ – senx = 0

$2\text{sen}^2 x$ + senx - 1 = 0 de donde Senx = 0.5 ó Senx = -1. Luego: x = 30 ; 150° ó x = 270°.

Según el ejercicio 0 ≤ x ≤ 180°. Respuesta la A.

29- Sen2x = $\text{sen}^2 x$ 2senxcosx = $\text{sen}^2 x$ 2cosx = senx

2 = tanx. Luego: x = arctan 2 x = 63°26'5,8''. Respuesta la B.

30- $\text{Sen}^4 x = 1$ $\text{Senx} = \pm\sqrt[4]{1}$ Senx = ±1 de donde x = arcsen (±1) x = 90° y x = 270°. Respuesta la B.

31- Aplicando la función seno tenemos:

$$\text{Sen}\theta = \frac{h}{OA} \Rightarrow OA = \frac{h}{\text{sen}\theta}$$

$$OA = \frac{5000}{sen30°} = \frac{5000}{0.5}$$

$OA = 10.000$ mts Respuesta la D.

32- $Tan\theta = \dfrac{h-2}{100+x}$

$$Tan\alpha = \frac{h-2}{x}$$

$$x\tan\alpha = (h-2)$$

$(100+x)Tan\theta = (h-2)$ Igualando:

100Tanθ + xtanθ = xtanα
100tanθ = xtanα – xtanθ $100\tan\theta = x(\tan\alpha - \tan\theta)$

$$x = \frac{100\tan\theta}{\tan\alpha - \tan\theta}$$

$h = x\tan\alpha + 2 \qquad h = \dfrac{100\tan\theta - \tan\alpha}{\tan\alpha - \tan\theta} + 2$

$$h = \frac{100\tan 37°\tan 53°}{\tan 53° - \tan 37°} + 2 = \frac{100 * 0,75 * 1,33}{0,58} + 2$$

$h = 173,98 \qquad h \approx 174$ mts. Respuesta la C.

33-

Tenemos que $Tan\theta = h/M$ y $\tan\alpha = h/N$

$M = h/\tan\theta$ y $N = h/\tan\alpha$ como X = M + N

$$x = \frac{h}{\tan\theta} + \frac{h}{\tan\alpha} = h\frac{(\tan\theta + \tan\alpha)}{\tan\theta\tan\alpha} = 200\frac{(0,57+1,73)}{0,57*1,73} = 200\frac{(2,3)}{0.98}$$

$x = 469,38 \approx 470$ mts. Respuesta la C.

34-

Aplicando las funciones trigonométricas:

Tan 45° = 500/D ; D = 500/tan 45° ; pero tan 45° = 1 !!!

Luego: D = 500mts

Tan 30° = $(500-x)/D$; D. tan 30° = 500 – x de donde x = 500 - Dtan30°

x = 500 – 500 * 0.57 = 500 - 285 = 215mts. Respuesta la D.

35- Inicialmente la escalera se halla sobre la pared a una altura
Lsenα = 10 * 0 * 0.8 = 8mts al bajar dos metros queda a una altura:
DB = 8 - 2 = 6mts.
Pero DB = Lsenβ de donde:

Lsenβ = 6

$$\text{sen}\beta = \frac{6}{L} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$\beta = \text{arcsen } 0.6$ $\beta \approx 37°$ Respuesta la A.

36- Basándonos en el gráfico del ejercicio anterior la primera posición será en la que forma la escalera con el suelo un ángulo β y la segunda cuando el ángulo formado es α.

Se requiere que $BD^2 = L * y$

Pero $\overline{BD}$ = Lsenβ → $(L\text{sen}\beta)^2 = L * y$ de donde $L^2\text{sen}^2\beta = L * y$ → $L\text{sen}^2\beta = y$ (1)

Ahora: x = Lcosβ - Lcosα = L(cosβ - cosα) (2)

y = Lsenα - Lsenβ = L(senα - senβ) (3)

Colocando 3 en 1: $L\text{sen}^2\beta = L(\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta) \Rightarrow \text{sen}^2\beta + \text{sen}\beta = \text{sen}\alpha$

Senα = $(\text{sen}37°)^2 + (\text{sen}37°) = (0.6)^2 + 0,6 = 0.96$

α = arcsen 0.96 α = 73°44'23" de donde:

x = 10(cos37°- cos73°44'23")

x = 10(0.8 - 0.28) = 10(0.052) = 5,2 m. Respuesta la A.

37- Aplicando el concepto de distancia entre dos puntos:

$$\overline{AB} = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{(25+4)} = \sqrt{29}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-6)^2 + (3-(7))^2} = \sqrt{(16+100)} = \sqrt{116}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(7-6)^2 + (5-(-7))^2} = \sqrt{(1+144)} = \sqrt{145}$$

La pendiente de los lados la hallamos por la formula:

Pendiente $= \dfrac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$ así para cada lado:

Pendiente de $\overline{AB} = (5-3)/(7-2) = 2/5$

Pendiente de $\overline{BC} = (-7-7)/(6-2) = -5/2$

Pendiente de $\overline{AC} = (-7-5)/(6-7) = 12$

El perímetro está dado por:

$p = \sqrt{29} + \sqrt{116} + \sqrt{145} = 28{,}19 \approx 28{,}2$ Respuesta la C.

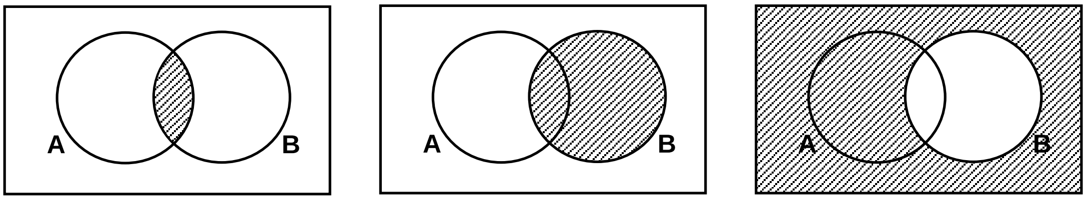
38- Respuesta la d.

SOLUCION AL TEST DE CÁLCULO

1- Se trata de los elementos que solo están en conjunto A unidos con los elementos que solo están en el conjunto B. Es decir:

$(A-B)\cup(B-A)$. Respuesta la D.

2- Observemos:



$A\cap B$ $\qquad$ $(A\cap B)\cup B$ $\qquad$ $[(A\cap B)\cup B]'$

Respuesta la A.

3- En este caso es la intersección de los conjuntos $A\cap B$. Respuesta la C.

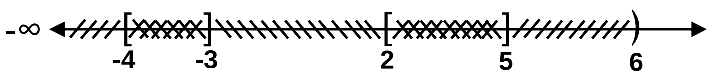
4- Analicemos la gráfica:

$A\cap B =$  $A\cap B=(-1,\ 3]$

Respuesta la A.

5- $A - B =$  $A-B=[-3,\ 2)$

Respuesta la B.

6- $A - B =$  $A-B=(-\infty,-4)\cup(\ 5,\ 6\ )$

Respuesta la A. Obsérvese que el rayado de A es  y A - B será los lugares de la recta donde solo haya el rayado de A.

7- $3x - 5 < x + 7 \quad 3x - x < 7 + 5: 2x < 12 \quad x < 6$. Respuesta la E.

8- $x - 3 \geq 2x + 1 \quad -3 - 1 \geq 2x - x \rightarrow x \leq -4$. Respuesta la E.

9. Primera solución:

$x^2 - 4 \leq o$ factorizando $(x - 2)(x + 2) \leq o$ se requiere que el producto de dos números sea negativo, luego los números tendrán signos diferentes.

Caso 1

$x - 2 \geq 0$ y $x + 2 \leq 0$

$x \geq 2$ y $x \leq -2$

$Solucion_1 = \varnothing$ ya que no hay un número tal, que sea mayor o igual que 2 y al mismo tiempo menor o igual que -2.

Segunda solución:

$x^2 - 4 \leq 0$ $x^2 \leq 4$ aplicando el concepto de valor absoluto :

Caso 2 (cambiando los sentidos de las desigualdades)

$x \leq 2$ y $x \geq -2$

$Solución_2$: [-2, 2]

$S_1 = S_1 \cup S_2 = [-2,2]$.

Respuesta la B.

10. $x^2 > 9$ según el ejercicio anterior:

$|x| > 3$ de donde $x > 3$ ó $x < -3$

Solución $(-\infty,-3) \cup (3, \infty)$ Respuesta la A.

11- $x (x - 1) > 0$ se requiere que el signo de los factores sea igual, puesto que el producto es mayor que cero.

Caso 1.

$x > 0$ y $x - 1 > 0$
$x > 0$ y $x > 1$

Caso 2. $x < 0$ y $x - 1 < 0$

$x < 0$ y $x < 0$

$Sf = S_1 \cup S_2$ $S_f = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Respuesta la B.

12- $(x - 3) (2 - x) \leq 0$

Método analítico:
El producto es negativo, luego los factores han de tener signos diferentes:

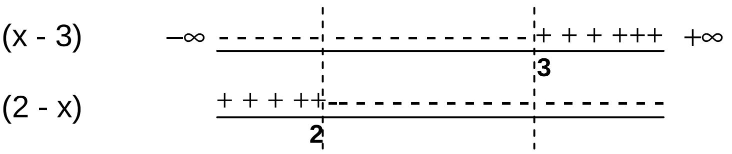
Caso 1. $x - 3 \geq 0$ y $2 - x \leq 0$
$x \geq 3$ y $x \geq 2$ $S_1 = [3 + \infty)$

Caso 2. $x - 3 \leq 0$ y $2 - x \geq 0$
$x \leq 3$ y $x \leq 2$ $S_2 = (-\infty, 2]$

$S_f = S_1 \cup S_2 \qquad S_f = (-\infty,\ 2] \cup [3 + \infty)$ Respuesta la E.

Método Grafico:

Se trata de hallar el valor de los factores en los cuales dichos factores se hacen cero:



Ahora tenemos que analizar los intervalos:

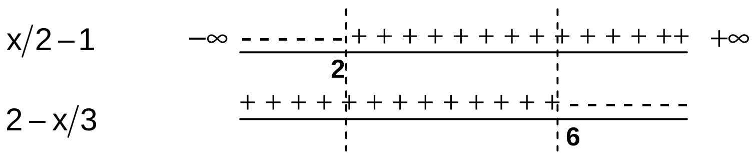
Entre -∞ y 2 obsérvese que los signos + ó – se deben a como se
Entre 2 y 3 porte le factor según que x sea mayor o menor que
Entre 3 y +∞ el valor critico.

Nos servirán los intervalos donde el producto de (x - 3) y (2 - x) sea negativo, es decir, los intervalos en los que los factores tengan signos diferentes, así:

$(-\infty,\ 2]$	es	-	por	+	igual	a	-	sirve
$[2,\ 3]$	es	-	por	-	igual	a	+	no sirve
$[3,\ +\infty)$	es	+	por	-	igual	a	-	sirve

Solución: $(-\infty,\ 2] \cup [3,\ +\infty)$

13- $(x/2 - 1)\ \ (2 - x/3) \leq 0$ como en el ejercicio anterior:



Obsérvese que el valor critico de $x/2 - 1$ es x = 2
Cuando x vale mas de 2, $x/2 - 1$ es positivo (+++...)
Cuando x vale menos de 2, $x/2 - 1$ es negativo (---...)
Y así se trabaja todos los factores que intervengan.

Entre (-∞, 2]	-	por	+	=	-	sirve
[2, 6]	+	por	+	=	+	no sirve
[6, +∞)	+	por	-	=	-	sirve

Solución :(-∞, 2] U [6, +∞). Respuesta la A.

14- $6x^2 - 5x + 1 \leq$ o primeramente factorizamos

$$\frac{(6x)^2-5(6x)+6}{6}\leq 0 \qquad \frac{(6x-3)(6x-2)}{6}\leq 0$$

$$\frac{3(2x-1)\ 2(3x-1)}{6}\leq 0 \qquad (2x-1)(3x-1)\ \leq 0$$

Aplicando el método grafico:

2x - 1 $\quad -\infty$ - - - - - - - - - - - - - - - - - + + + + ++ $+\infty$

$\frac{1}{2}$

3x - 1 $\quad$ - - - - - -++ + + + + + + + + + + + + + +

$\frac{1}{3}$

Como el producto debe ser menor o igual que cero se requiere que los factores tengan signos diferentes:

Entre: (-∞, 1/3] - por - = + no sirve
[1/3, 1/2] - por + = - sirve
[1/2,+∞) + por + = + no sirve

Solución: [1/3,1/2]. Respuesta la B.

15- $x^2+11x-26 \geq 0$: $(x+13)\ (x-2) \geq 0$

El producto debe ser positivo:

Entre (-∞, -13] - por - = + sirve
[-13,2] + por - = - no sirve
[2,+∞) + por + = + sirve

Solución: (-∞,-13] U [2,+∞). Respuesta la D.

16- $3x^2-2 \;\geq\; -5x \;\rightarrow 3x^2+5x-2 \;\geq$ o factorizando:

$$\frac{(3x)+5(3x)-6}{3} \;\geq 0\; \frac{(3x+6)(3x-1)}{3} \;\geq 0\; \frac{3(x+2)(3x-1)}{3}\; \frac{3(x+2)(3x-1)}{3} \;\geq\; 0$$

$$\left(x+2\right)\left(3x-1\right)\geq 0$$

$x+2$ $\quad -\infty$ - - - - - -+ + + + + + + + + + + + + + ++ $+\infty$

-2

$3x-1$ $\quad -\infty$ - - - - - - - - - - - - - - - - - + + + + + $+\infty$

$\frac{1}{3}$

El producto debe ser positivo.

Entre: $\left(-\infty,\ -2\right]$ - por - = + sirve

$[-2,\ 1/3]$ + por - = - no sirve

$[1/3,\ +\infty)$ + por + = + sirve

Solución: $(-\infty,\ -2] \cup [1/3,\ +\infty)$ Respuesta La D.

17- $|x-1| = 2$ x – 1 = 2 ó x – 1 = -2

x = 3 ó x = -1

Solución: {-1, 3}. Respuesta La A.

18- $|x-1/2| = 2$ $x-1/2=2$ ó $x-1/2=-2$

$x=2+1/2=2$ ó $x=-2+1/2$

$x = 5/2$ ó $x = -3/2$

Solución: $\{-3/2,\ 5/2\}$ Respuesta La A.

19- $|5-x| = 7$ 5 - x = 7 ó 5 - x = -7

x = -2 ó x = 12

Solución: {-2, 12}. Respuesta La A.

20- $|x+5| = |x-4|$ x + 3 = x - 4 ó x + 3 = - (x - 4)

3 = - 4 !! ! ó x + 3 = - x + 4

2x = 1 ó x = 1/2

Solución: $\{\ 1/2\ \}$ Respuesta La A.

21- $|2x+1| = |x-4|$ | 2x + 1 = x - 4 ó 2x + 1 = - (x - 4)

2x – x = -4 - 1 ó 2x + 1 = - x + 4

x = - 5 ó 3x = 3

x = - 5 ó x = 1

Solución: {- 5, 1}. Respuesta La E.

22- $|x-1| > 6$ x – 1 > 6 ó x – 1 < - 6

x > 7 ó x < - 5

Solución: (- ∞, - 5) U (7, + ∞). Respuesta La B.

23- $|x+2| < 1$ -1 < x + 2 < 1

-2 - 2 < x + 2 - 2 < 1 - 2

-3 < x < - 1

Solución: (-3, -1). Respuesta La D.

24- $|1-4x| < 8$ $\quad$ -8 < 1 - 4x < 8

-8 - 1 < 1 - 4x - 1 < 8 - 1

-9 < - 4x < 7

Multiplicando por -1 y atendiendo a que las desigualdades cambian:

$9 > 4x > 7$ ó $7 < 4x < 9$

$$\frac{7}{4} < \frac{4x}{4} < \frac{9}{4} \qquad \frac{7}{4} < x < \frac{9}{4}$$

Solución: $(7/4,\ 9/4)$ Respuesta La D

25- | 3x-1| ≥ x+2 $\quad$ 3x – 1 ≥ x + 2 ó 3x - 1 ≤ - x – 2

2x ≥ 3 ó 4x ≤ - 1

x ≥ 3/2 ó x ≤ - 1/4

Solución: $(-\infty,\ 1/4] \cup [3/2,\ +\infty)$ Respuesta La A.

26- $|3-x/5| \leq 3x+8$

Condición 3x + 8 ≥ 0: $x \geq -8/3$

$-(3x+8) \leq 3-x/5 \leq 3x+8$

$-3x-8 \leq 3-x/5 \leq 3x+8$ Multiplicando por 5

-15x - 40 ≤ 15 – x ≤ 15x + 40 separando las inecuaciones:

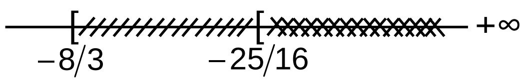
-15x - 40 ≤ 15 – x y 15 – x ≤ 15 + 40

-40 - 15 ≤ -x + 15x y 15 – 40 ≤ 15x + x

-55 ≤ 14x y -25 ≤ 16x

$x \geq \frac{-55}{14}$ y $x \geq \frac{-25}{16}$

Como el signo "y" equivale a intercepto: nos da: $x \geq -25/16$ y este resultado lo interceptamos con $x \geq -8/3$.



Solución: $[-25/16,\ +\infty)$

Respuesta La A.

27- $|3-x/2| > x/3-1$

$3-x/2 > x/3-1$ ó $3-x/2 < 1-x/3$ Multiplico por 6.

18 - 3x > 2x - 6 ó 18 - 3x < 6 - 2x

18 + 6 > 2x + 3x ó 18 – 6 < -2x + 3x

24 > 5x ó 12 < x

$$x < \frac{24}{5} \qquad ó \qquad x > 12$$

Solución: $(-\infty,\ 24/5) \cup (12,\ \infty)$ Respuesta La A.

28- $\left|\frac{x+4}{x-2}\right| > 2 \qquad \frac{x+4}{x-2} > 2 \quad ó \quad \frac{x+4}{x-2} < -2$

$$\frac{x+4}{x-2} > 2 > 0 \qquad ó \qquad \frac{x+4}{x-2} + 2 < 0$$

$$\frac{x+4-2(x-2)}{x-2} > 0 \qquad ó \qquad \frac{x+4+2(x-2)}{x-2} < 0$$

$$\frac{x+4-2x+4}{x-2} > 0 \qquad ó \qquad \frac{x+4+2x-4}{x-2} < 0$$

$$\frac{8-x}{x-2} > 0 \qquad ó \qquad \frac{3x}{x-2} < 0$$

Atiéndase al siguiente artificio: $(x - 2)^2$ nunca es negativo, luego podemos multiplicar las dos inecuaciones por dicho factor, y las desigualdades no cambian.

$$\frac{(x-2)^2(8-x)}{(x-2)} > 0 \qquad ó \qquad \frac{(x-2)^2\,3x}{(x-2)} < 0$$

$(x - 2)\ (8 - x) > 0$ ó $(x - 2)\ (3x) < 0$

Ahora podemos resolver independientemente cada "inecuación" y unir las soluciones:

x - 2 $-\infty$ - - - - - - + + + + + + + + + $+\infty$ el producto debe ser positivo.
2
8 - x + + + + + + + + + - - - - - -
8

Entre: $(-\infty, 2)$ - por + = - no sirve
$(2, 8)$ - por + = + sirve
$(8, +\infty)$ + por + = - no sirve $S_1 = (2, 8)$

x - 2 $-\infty$ - - - - - - - - - - - - ++ + + $+\infty$ El producto debe ser negativo
2
3x - - - - - + + + + + + + + + +
0

Entre: $(-\infty, 0)$ - por - = + no sirve
$(0, 2)$ - por + = - sirve
$(2, +\infty)$ + por + = + no sirve $S_2 = (0, +2)$

$S_f = S_1 \cup S_2 = (0,2) \cup (2,8)$. Respuesta La C.

29- $1 < |2x+2| < 2$

Separando las inecuaciones:

$1 < |2x + 2|$ y $|2x + 2| < 2$

$|2x + 2| > 1$ y $|2x + 2| < 2$

$2x + 2 > 1$ ó $2x + 2 < -1$ y $-2 < 2x + 2 < 0$

$x > -1/2$ ó $x < -3/2$ y $-4 < 2x < 0$

$(-\infty, -3/2) \cup (-1/2, +\infty)$ y $-2 < x < 0$ $(-2,0)$

Interceptando estas dos soluciones:

$-\infty$ ////////(xxxxxxxx)\\\\\\\\\\\\\\(xxxxxxxxxxxxxx)////// $+\infty$

-2 $-3/2$ $-1/2$ **0**

$S_f\,(-2,-3/2) \cup (-1/2,0)$ Respuesta La A.

30- $\dfrac{x+1}{3x-5} \le 2$ $\quad \dfrac{x+1}{3x-5} - 2 \le 0:$ $\quad \dfrac{x+1-2(3x-5)}{3x-5} \le 0$

$\dfrac{x+1-6x+10}{3x-5} \le 0$ $\quad \dfrac{11-5x}{3x-5} \le 0$

11 - 5x $\quad -\infty$ + + + + + + + + + + - - - - - $+\infty$ el cociente debe ser negativo

$11/5$

3x - 5 $\quad$ - - - - - + + + + + + + + + +

$5/3$

Entre: $(-\infty,\ 5/3)$ + dividido - = - sirve

$(5/3,\ 11/5]$ + dividido + = + no sirve

$[11/5,\ +\infty)$ - dividido + = - sirve

Solución: $(-\infty,\ 5/3) \cup [11/5,\ +\infty)$ Respuesta La A.

31- $\dfrac{x+1}{x-1} \le \dfrac{3-x}{2+x}$: $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{3-x}{2+x} \le 0$

$\dfrac{(x+1)(2+x)-(3-x)(x-1)}{(x-1)(2+x)} \le 0$ $\quad \dfrac{2x+x^2+2+x-3x+3+x^2-x}{(x-1)(2+X)} \le 0$

$\dfrac{2x^2-x+5}{(x-1)(2+x)} \le 0$

Por ensayo y error se puede probar que el numerador nunca será negativo, y luego solo resta analizar el denominador.
Se requiere que el denominador sea negativo puesto que la fracción ha de ser negativa.

(x - 1) $-\infty$ - - - - - - - - - - - - - + + + $+\infty$
1

(2 + x) - - - - + + + + + + + + + + +
-2

Entre: (-∞, -29) - por - = + no sirve
(-2, 1) - por + = + sirve
(1, +∞) - por + = + no sirve

Solución: (-2,1). Respuesta La B.

32- Demuéstrese que la respuesta es la a.

33- Pruebe que la respuesta es la a.

34- Verifique que la respuesta es la a.

35- $x^2 + 1 \geq x^2 - 1$ $x^3 - x^2 + 1 + 1 \geq 0$
$x^3 - x^2 + 2 \geq 0$ factorizando:

$(x + 1)(x^2 - 2x + 2) \geq 0$ el factor $(x^2 - 2x + 2)$ siempre será mayor que cero (compruébese) solo hay que analizar $(x + 1) \geq 0$ esto es $x \geq -1$.

Solución: $[-1, +\infty)$. Respuesta La C.

36- $|x - 2| \geq 3x + 1$ $x - 2 \geq 3x + 1$ ó $x - 2 \leq -3x - 1$
$-2 - 1 \geq 3x - x$ ó $x + 3x \leq -1 + 2$
$-3 \geq 2x$ ó $4x \leq 1$
$x \leq -3/2$ ó $x \leq 1/4$

Solución: $(-\infty, -3/2] \cup (-\infty, 1/4] = (-\infty, 1/4]$ Respuesta La B.

37- $1 < |5 - 3x| \leq 2$ separando las inecuaciones.

$1 < |5 - 3x|$ y $|5 - 3x| \leq 2$

$|5 - 3x| > 1$ y $|5 - 3x| \leq 2$

$5 - 3x > 1$ ó $5 - 3x < -1$ y $-2 \leq 5 - 3x \leq 2$

$4 > 3x$ ó $6 < 3x$ y $-7 \leq -3x \leq -3$

$x < 4/3$ ó $x > 2$ y $3 \leq 3x \leq 7$

$1 \leq x \leq 7/3$

$S_1 = \left(-\infty, 4/3\right) \cup \left(2, +\infty\right)$ y $S_2 = \left[1,\ 7/3\right]$

Interceptado: $-\infty$ ///////[xxxxxxxx)\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\(xxxxxxxx]/////// $+\infty$

1 $\quad$ 4/3 $\quad$ 2 $\quad$ 7/3

$S_f = \left[1,\ 4/3\right) \cup \left(2,\ 7/3\right]$ Respuesta La B.

38- $\left|\dfrac{x-1}{x^2-1}\right| \leq 1 \qquad \left|\dfrac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right| \leq 1: \qquad \left|\dfrac{1}{x+1}\right| \leq 1 \quad x \neq +1$

De donde: $-1 \leq \dfrac{1}{x+1} \leq 1$ separándolas

$\dfrac{1}{x+1} \geq -1$ y $\dfrac{1}{x+1} \geq 1$

$\dfrac{1}{x+1} + 1 \geq 0$ y $\dfrac{1}{x+1} - 1 \leq 0$

$\dfrac{1+x+1}{x+1} \geq 0$ y $\dfrac{1-x-1}{x+1} \leq 0$

$\dfrac{x+2}{x+1} \geq 0$ y $\dfrac{-x}{x+1} \leq 0$

Multiplicando por $(x + 1)^2$. (Recordar ejercicio 28)

(x + 1)(x + 2) ≥ 0 y (-x) (x + 1) ≤ 0

x + 1 $\quad -\infty$ - - - - - - - - - - - - - + + ++ $+\infty$ el producto debe ser positivo.

-1

x + 2 $\quad$ - - - - - - + + + + + + + + +

-2

Entre: (-∞, -2] - por - = + sirve

[-2, -1] - por + = - no sirve

[-1, +∞) + por + = + sirve $\quad S_1 = \left[-\infty,\ -2\right] \cup \left[-1,\ +\infty\right)$

-x $\quad -\infty$ + + + + + + + + + - - - - - $+\infty$

0

x + 1 $\quad$ - - - - - - + + + + + + + + + el producto debe ser negativo.

-1

Entre: (-∞, -1] + por - = - sirve

[-1, 0] + por + = + no sirve

$[0, +\infty)$ - por + = - sirve $S_2 = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

Interceptado S_1 y S_2

$-\infty$ XXXXXXX] \\\\\\\\\\\\\\\\ ] //////////// [XXXXXXX $+\infty$

-2 -1 0

$S_f = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

Pero como la condición inicial dice $x \neq 1$

$S_f = (-\infty, -2] \cup [0, 1) \cup (1, +\infty)$. Respuesta La E.

39- $|3x - 5| < |5 - x|$

Primer método: aplicando las propiedades:

$-|5 - x| < 3x - 5 < |5 - x|$ separando:

$-|5 - x| < 3x - 5$ y $|5 - x| > 3x - 5$

$|5 - x| > 5 - 3x$ y $5 - x > 3x - 5$ ó $5 - x < 5 - 3x$

$5 - x > 5 - 3x$ ó $5 - x < 3x - 5$ y $5 - x > 3x - 5$ ó $5 - x < 5 - 3x$

$2x > 0$ ó $x > 5/2$ y $x < 5/2$ ó $2x < 0$

$x > 0$ ó $x > 5/2$ y $x < 5/2$ ó $x < 0$

$S_1 = (0, +\infty)$ $S_2 = (-\infty, 5/2)$

$S_f = S_1 \cap S_2$ $-\infty$ ////////////(XXXXXXXX)\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\ $+\infty$

0 5/2

$S_f = (0, 5/2)$. Respuesta La A.

Segundo método: grafico:

$|3x - 5| - |5 - x| < 0$

Analizaremos los valores críticos, y según el comportamiento del termino que se analice cambiaremos o no el signo que lo precede y levantaremos las barras de valor absoluto. Después interceptaremos el resultado con el intervalo analizado.

$3x – 5$ $-\infty$ - - - - - - + + + + + + + + + $+\infty$

5/3

$5 – x$ + + + + + + + + ++ - - - - -

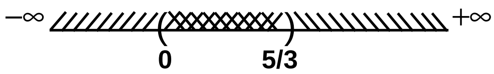
5

Entre $(-\infty, 5/3)$ el signo del primer valor absoluto es negativo y el del segundo positivo, debemos anteponer un signo menos al primero y al segundo dejarlo tal cual:

$-(3x - 5) - (5 - x) < 0$

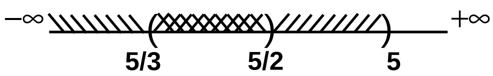
$-3x + 5 – 5 + x < 0$ $-2x < 0$ $x > 0$

$x > 0$ lo interceptamos con $(-\infty, 5/3)$



$S_1 = (0, 5/3)$

Entre $(5/3, 5)$ ambos valores absolutos tienen signo + luego quedan igual
$(3x - 5) – (5 - x) < 0$ $\quad 3x – 5 – 5 + x < 0$
$4x - 10 < 0$ $\quad x < 5/2$ interceptamos con $(5/3, 5)$

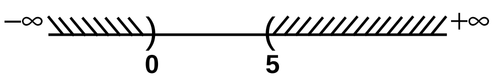


$S_2 = (5/3, 5/2)$

Entre $(5, +\infty)$ el primer valor absoluto tiene signo + y el segundo tiene signo menos:

$(3x - 5) + (5 - x) < 0$ $\quad 3x – 5 + 5 – x < 0$

$2x < 0$ $\quad x < 0$ interceptamos con $(5, +\infty)$



$S_3 = ø$ $\quad S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3$
$S_f = (0, 5/3) \cup (5/3, 5/2)$

$S_f = (0, 5/2)$. Respuesta La A.

40- $f(x) = 5x – 999$

El dominio se refiere a los valores del argumento (x) que hacen que la función exista ($f_{(x)}$), es decir, que tenga un valor real.

En este caso para cualquier valor de x, f(x) existe, luego el dominio son los reales:
$Dm = (-\infty, +\infty)$. Respuesta La A.

41- $f_{(x)} = x – 4$ al igual que en el ejercicio anterior, para cualquier valor real de x, f(x) existe:
$Dm = (-\infty, + \infty)$. Respuesta La B.

42- $f_{(x)} = x^2 – 4$. $f_{(x)}$ existe para todo x que pertenezca a $(-\infty. + \infty)$. Respuesta La E.

43- $f_{(x)} = \sqrt{x} + 1$. El dominio de esta función esta dado por los valores de x tal que $x \geq 0$ puesto que si x es negativa $\sqrt{x}$ no es real. $Dm = [0, +\infty)$.

Ahora, el menor valor que puede tomar x es 0, y cuando x vale cero, $f_{(x)}$ vale 1. Luego el mínimo valor de $f_{(x)}$ es 1 y cuando x tienda infinito $f_{(x)}$ tiende a infinito luego el rango es: $Rg = [1, +\infty)$.

Respuesta La D.

NOTA: El rango son los valores que tome la función y le den sentido, es decir, la mantenga en el conjunto de los números reales.

44- $f_{(x)} = \dfrac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$

Hagamos $f_{(x)} = y$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad y\left(3-\sqrt{x}\right) = \sqrt{x}$$

$$3y - \sqrt{(x)}\,y = \sqrt{x}$$

$$3y = \sqrt{x} + \sqrt{(x)}\,y \quad \Rightarrow \quad 3y = \sqrt{x}\,(1+y)$$

$$\sqrt{x} = \frac{3y}{1+y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9y^2}{(1+y)^2}$$

El único valor de **y** para el cual **x** no existe es $y = -1$ luego el rango será: todo $y \neq -1$.
Respuesta La D.

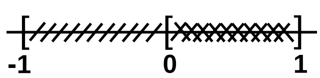
45- $f_{(x)} = \dfrac{x-\sqrt{3x}}{5-\sqrt{\left(1-x^2\right)}}$

Debemos analizar las siguientes condiciones:

$3x \geq 0$ y $1-x^2 \geq 0$ y $5-\sqrt{\left(1-x^2\right)} \neq 0$

$x \geq 0$ y $|x| \leq 1$ y nunca será 0

$x \geq 0$ y $-1 \leq x \leq 1$

Dm = 

= [0, 1]. Respuesta La B.

46- El mayor valor de $\sqrt{\left(16-x^2\right)}$ es 4 cuando x valga 0 y $f_{(x)}$ Valdrá -1 el mínimo valor de $\sqrt{\left(16-x^2\right)}$ es cero cuando x valga cuatro, y $f_{(x)}$ valdrá -5. Luego el rango es Rg = [-5, -1].
Respuesta La E.

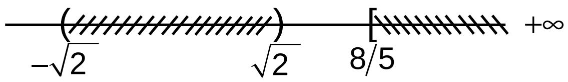
47- $f_{(x)} = \dfrac{3-\sqrt{(5X-8)}}{\sqrt{(8-4X^2)}}$ Las condiciones son:

$5x - 8 \;\geq\; 0 \quad y \quad 8 - 4x^2 \;>\; 0$

$x \geq 8/5 \quad y \quad x^2 < 2$

$x \geq 8/5 \quad y \quad |x^2| < \sqrt{2}$

$x \geq 8/5 \quad y \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$



El intercepto es vació. Luego no hay un valor de **x** para el cual la función exista. Respuesta La C.

48- La función no existe para cualquier **x**. Luego R_g no existe. Respuesta La E.

49- (f ó g) $_{(x)}$ = f (g$_{(x)}$) = f $\left(\sqrt{(x)}-2\right) \;=\; 3\left(\sqrt{(x)}-2\right)^2-5$

(f ó g) $_{(x)}$ $= 3\left(x^2-4\sqrt{x}+4\right)-5 \;=\; 3x^2-12\sqrt{x}+7$. Respuesta La E.

50- f (x) = x y $g_{(x)} = 4x^2$. Entonces (f ó g) x es:

(f ó g) $_{(x)}$ = f (g_x) = f ($4x^2$) = $4x^2$. Respuesta La C.

NOTA: f $_{(x)}$ toma el argumento (x) y lo deja tal cual, en este caso el argumento es $4x^2$.

51- $f_{(x)} = x^2$ y $g_{(x)} = \sqrt{x}$

$(f \text{ ó } g)_{(x)} = f\ (g_x) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ Respuesta La A.

NOTA: (f ó g) $_{(x)}$ = x pero el dominio de esta función es x tales que x es ≥ 0.

52- $(g \text{ ó } f)_{(x)} = g\ \left(f_{(x)}\right) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x}^{\,2} = |\ x\ |$

NOTA: $\sqrt{x^2}$ no es igual a x, puesto que si x toma valores negativos da un absurdo.

Observemos:

Para x = 2 $\sqrt{x^2} \overset{?}{=} x$ para x = -2 $\sqrt{\left((-2)^2\right)} \overset{?}{=} -2$

$\sqrt{2^2} \overset{?}{=} 2$ $\sqrt{4} \overset{?}{=} -2$

$\sqrt{4} \overset{?}{=} 2$ $\boxed{2 = -2}$ Absurdo!!!

$=$

$\boxed{2 = 2}$

Luego $\sqrt{x^2} = |\,x\,|$. Respuesta La C.

53- $(f \text{ ó } g)_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = f\left(\left[\sqrt{x}\,\right] - 1\right) = \left|\left[\sqrt{x}\,\right] - 1\right| - \left(\left[\sqrt{x}\,\right] - 1\right)^2$ Respuesta La E.

54- $(g \text{ ó } f)_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = g\left(|\,x\,| - x^2\right) = \left[\sqrt{\left(|\,x\,| - x^2\right)}\,\right] - 1$ Respuesta La B.

55- Para hallar el conjugado de un número complejo basta cambiar el signo de la parte imaginaria, así:

Si el complejo dado es z = 3 – 7 i el conjunto es $\bar{z} = 3 + 7\,i$. Respuesta La C.

56- De igual forma, si z = -1 – i, $\bar{z} = -1 + i$ donde $\bar{z}$ es el conjugado. Respuesta La C.

57- (1 – i) (1 + i) = 1 + i – i - i^2 = 1 – i^2 = 1 – (-1) = 2 un real puro !!!. Luego siempre que se multipliquen complejos conjugados el resultado es un real puro....Respuesta La C.

58- No se puede factorizar en el campo de los reales, debe hacerse en el campo de los complejos:

x^2 + 1= (x + i) (x – i) se delega al lector la comprobación de esta factorización. Respuesta La C.

59- Para hallar el modulo de un complejo dado en forma rectangular o cartesiana, de la forma: z = x + y i, el modulo es:

Módulo $= \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)} = \sqrt{\left(1^2 + \left(\sqrt{3}\,\right)^2\right)} = \sqrt{4} = 2$, es decir, el modulo es 2. Respuesta La B.

60- Para llevar a la forma trigonométrica se procede así:

$r = \sqrt{\left((1)^2 + \left(\sqrt{3}\,\right)^2\right)} = \sqrt{4} = 2$ El ángulo esta dado por:

Tan $\theta = y/x = \sqrt{3/1} = \sqrt{3}$ De donde $\theta = \arctan\left(\sqrt{3}\,\right)$

Θ = 60° es decir buscamos el ángulo al cual al sacarle la tangente de $\sqrt{3}$.

OJO: Cuando se busque el ángulo debe tenerse cuidado del cuadrante en se halla el complejo, en este caso X e Y son positivos y el cuadrante es el primero. Obsérvese que tan 240° también es $\sqrt{3}$ pero en ese punto no se halla el número complejo.

Nos queda: 2 (cos60° + sen60°). Respuesta La B.

61- De igual forma:

Módulo $= r = \sqrt{\left((2)^2 + \left(\sqrt{12}\right)^2\right)} = \sqrt{16} = 4$. Respuesta La D.

Nota: Dado un número complejo en forma cartesiana: x + yi, para pasarlo a la forma trigonométrica: r (cosθ + isenθ), se debe hallar el modulo (r) y el argumento (θ).

62- Primero pasamos los números a la forma trigonométrica:

Para Z_1: $r = \sqrt{\left((2)^2 + (2)^2\right)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\theta = \arctan(y/x) = \arctan(2/2) = \arctan(1) = 45° \text{ luego:}$$

$Z_1 = 2\sqrt{2}\,(\cos 45° + i\mathrm{sen}45°)$

Para Z_2: $r = \sqrt{\left((3/2)^2 + (1/2)^2\right)} = \sqrt{1} = 1$

$$\theta = \arctan(1/2)\Big/\left(\sqrt{3/2}\right) = \arctan\left(\sqrt{3/3}\right) = 30°$$

Z_2 = (cos 30° + isen 30°)

Recordemos que para dividir complejo en forma trigonométrica se utiliza la formula:
$Z_1/Z_2 = r_1/r_2\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]$ de donde:
$Z_1/Z_2 = 2\sqrt{2\left[\cos(45-30) + i\mathrm{sen}(45-30)\right]} = 2\sqrt{2(\cos 15° + i\mathrm{sen}15°)}$ Respuesta La A.

63- Lo primero que debemos hacer es hallar las posibles raíces racionales que están dadas por **p/q** donde **p** son los divisores del termino independiente y **q** son los divisores del coeficiente de la variable (**x**) elevada a su mayor exponente. Luego, p = 6, cuyos divisores son = ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

q = 1 cuyos divisores son: = ± 1.
Las posibles raíces racionales son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

La prueba de las raíces se hace generalmente por división sintética, pero en este caso, por ensayo y error hallamos que las raíces son: 1, 3 y -2 y, estos tres son los ceros del polinomio. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$. Respuesta La A.

64 – $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$ Sea $\sqrt[3]{x} = y^2$ cuando $x \to 1$ $y \to 1$

$x = y^6 \to \sqrt{x} = y^3$ reemplazando:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{y^3-1} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} = \lim_{y\to 1} \frac{y+1}{y^2+y+1} = \frac{1+1}{1+1+1}$$

De donde $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{3}$. Respuesta La A.

65- $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)(2+x)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)}$$

$\lim\limits_{x\to 2} \left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)(2+x) = \left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)(2+2) = 2\sqrt{2} * 4 = 8\sqrt{2}$ Respuesta La B.

66- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{4-x} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x+4)}{-(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4} -(x+4) = -(4+4) = -8$ Respuesta La D.

67- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x)(1+x)}{(1-x)} = \lim\limits_{x\to 1} 1+x = 1+1 = 2$. Respuesta La A.

68- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} x^2-2x+4$

$= (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12$. Respuesta La C.

69- $$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{6x^2+7x-5}{-1+6x-8x^2} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\dfrac{(6x)^2+7(6x)-30}{6}}{\dfrac{-8+6(8x)-(8x)^2}{8}} \quad \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\dfrac{(6x+10)(6x-3)}{6}}{\dfrac{(8x-4)(8x-2)}{8}}$$

$$= \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\dfrac{2(3x+5)3(2x-1)}{6}}{\dfrac{4(2x-1)2(4x-1)}{-8}} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{-(3x+5)(2x-1)}{(2x-1)(4x-1)} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{-(3x+5)}{(4x-1)}$$

$$=\frac{-\left(3/2+5\right)}{\left(4/2-1\right)}=\frac{-13/2}{1/1}=\frac{-13}{2}$$

70- $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{\sqrt{(5x+4)}-\sqrt{(x+4)}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{(5x+4)}-\sqrt{(x+4)}\right]\left[\sqrt{(5x+4)}+\sqrt{(x+4)}\right]}{2x\left(\sqrt{(5x+4)}+\sqrt{(x+4)}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{(5x+4)}\right)^2-\left(\sqrt{(x+4)}\right)^2}{2x\left(\sqrt{(5x+4)}+\sqrt{(x+4)}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x+4-x-4}{2x\left(\sqrt{(5x+4)}+\sqrt{(x+4)}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x\left(\sqrt{(5x+4)}+\sqrt{(x+4)}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{(5x+4)}+\sqrt{(x+4)}}=\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

71- $\lim\limits_{x\to\infty}\ \dfrac{5-2x^2}{3x+5x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\ \dfrac{5/x^2-2x^2/x^2}{3x/x^2+5x^2/x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\ \dfrac{5/x^2-2}{3/x+5}=\dfrac{0-2}{0+5}=\dfrac{-2}{5}$ Respuesta La D.

72- $\lim\limits_{x\to\infty}\ \sqrt{(x+3)}-\sqrt{(x+8)}\ =\lim\limits_{x\to\infty}\ \dfrac{\left[\sqrt{(x+3)}-\sqrt{(x-8)}\right]\left[\sqrt{(x+3)}+\sqrt{(x-8)}\right]}{\left(\sqrt{(x+3)}+\sqrt{(x-8)}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{(x+3)}\right)^2-\left(\sqrt{(x-8)}\right)^2}{\left(\sqrt{(x+3)}+\sqrt{(x-8)}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x+8}{\left(\sqrt{(x+3)}+\sqrt{(x-8)}\right)}$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11}{\left(\sqrt{(x+3)}+\sqrt{(5x-8)}\right)}=0$ El límite es cero. Respuesta La A.

73- $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{Senx}{5x}\ =\ \lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{1}{5}\ \dfrac{Senx}{x}\ =\ \dfrac{1}{5}\ \lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{Senx}{x}\ =\ \dfrac{1}{5}$ *1= $\dfrac{1}{5}$ Respuesta La A.

74- $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{Sen2x}{3x}=\ \lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{2}{3}\ \dfrac{Sen2x}{2x}=\ \dfrac{2}{3}\ \lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{Sen2x}{2x}\ =\ \dfrac{2}{3}$ Respuesta La A.

75- Respuesta La C.

76- $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{Senx}{Tanx}=\ \lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{Senx}{\dfrac{Senx}{Cosx}}\ =\ \lim\limits_{x\to 0}\ Cosx=1$ Respuesta La B.

77- Respuesta La A.

78- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-10)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-10} = \frac{2-3}{2-10} = \frac{1}{8}$ Respuesta La A.

79- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{(4x^2+3x+6)} - \sqrt{(4x^2+x+3)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\sqrt{(4x^2+3x+6)}-\sqrt{(4x^2+x+3)}\right]\left[\sqrt{(4x^2+3x+6)}+\sqrt{(4x^2+x+3)}\right]}{\left[\sqrt{(4x^2+3x+6)}+\sqrt{(4x^2+x+3)}\right]} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x+6-4x^2-x-3}{\left(\sqrt{(4x^2+3x+6)}+\sqrt{(4x^2+x+3)}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\left(\sqrt{(4x^2+3x+6)}+\sqrt{(4x^2+x+3)}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x/x+3/x}{\left(\sqrt{(4x^2/x^2+3x/x^2+6/x^2)}+\sqrt{(4x^2/x^2+x/x^2+3/x^2)}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+3/x}{\sqrt{(4+3/x+6/x^2)}+\sqrt{(4+1/x+3/x^2)}} = \frac{2+0}{\sqrt{(4+0+0)}+\sqrt{(4+0+0)}} = \frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} =$$

$\frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$ Respuesta La A.

80- $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-5\sqrt{x}}{8\sqrt{x}-11x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x/x-5\sqrt{x/x}}{8\sqrt{x/x}-11x/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-5/\sqrt{x}}{8/\sqrt{x}-11} = \frac{3-0}{0-11} = \frac{-3}{11}$

Respuesta La E.

81- $\lim_{x\to 1} \frac{x^3(1-x^2)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3(1-x)(1+x)}{(1-x)} = \lim_{x\to 1} x^3(1+x) = 1(1+1) = 2$ Respuesta La C.

82- $\lim_{x\to\pi/3} \frac{1+\cos 2x}{x} = \frac{1+\cos(2\pi/3)}{\pi/3} = \frac{1-0.5}{\pi/3} = \frac{1/2}{\pi/3} = \frac{3}{2\pi}$ Respuesta La E.

83- Respuesta La B.

84- Es fácil ver que la sucesión esta formada por los números pares que los genera el termino 2n. Respuesta La D.

85- 1, 5/4, 8/6, 11/8...
Obsérvese que los numeradores aumentan de tres en tres. Pensemos en un numero de la forma 3n.
3n genera los números 3, 6, 9, 12,... que son los numeradores de la serie, si los disminuimos en uno. Luego el numerador puede ser de la forma 3n – 1.

El denominador son los números pares, el termino n-ésimo será: (3n – 1) / 2n.
Respuesta La C.

86- 1/2, 4/5, 9/10, 16/17,...nótese que los numeradores son los cuadrados de los enteros positivos, y los denominadores, estos mismos aumentados en la unidad, luego, el termino n-ésimo es de la forma n^2/n^2+1. Respuesta La A.

87- 2, 1, 8/9, 1, 32/25, 64/36,.... en el numerador se puede ver potencias de 2, y en el denominador aparecen algunos cuadrados de los enteros. Luego el termino n-ésimo puede ser de la forma 2^n / n^2, que genera: 2/1, 4/4, 8/9, 16/16, 32/25, que es la misma serie, solo que se han hecho algunas simplificaciones. Respuesta La D.

88- 0, 1/3, 2/4, 3/5, 4/6... Observemos que los numeradores son los naturales disminuidos en 1 y los denominadores son los naturales aumentados en uno, el termino n-ésimo es de la forma: $(n-1)/(n+1)$ Respuesta La A.

89- $\dfrac{\sqrt[3]{(n^2)+n}}{3n} = \dfrac{\sqrt[3]{(1)+1}}{3}\ ,\ \dfrac{\sqrt[3]{(4)+2}}{6}\ ,\ \dfrac{\sqrt[3]{(9)+3}}{9}\ ,\ \dfrac{\sqrt[3]{(16)+4}}{12}$

Luego el cuarto termino es: $\dfrac{\sqrt[3]{(16)+4}}{12}$ que podemos simplificar: $\dfrac{\sqrt[3]{(2)+2}}{6}$ Respuesta La D.

90- $\dfrac{3n^2+5}{2n} = \dfrac{3+5}{2}\ ,\ \dfrac{12+5}{4}\ ,\ \dfrac{27+5}{6}\ ,\ \dfrac{48+5}{8}$ luego el cuarto termino es: $53/8$ Respuesta La A.

91- $\dfrac{n!+n^2}{n^5} = \dfrac{2}{1}\ ,\ \dfrac{2+4}{32}\ ,\ \dfrac{6+9}{243} = \dfrac{15}{243} = \dfrac{5}{81}$ Respuesta La B.

92- El primer termino es: (1+1) /1 = 2
El segundo termino es: (2+4) /8 = 3/4
El tercer termino es: (6+9) /27 = 15/27 = 5/9 la suma es:

$$2+\frac{3}{4}+\frac{5}{9} = \frac{72+27+20}{36} = \frac{119}{36}.$$ Respuesta La B.

93- $f_{(x)} = 3x-1$ Sea $\mathbf{f_{(x)}} = \mathbf{Y}$ y la derivada es igual a **Y'**
$Y = 3x-1$ (derivada de una potencia)
$Y' = 3$ Respuesta La B.

94 - Y = 3 - 5x → Y' = - 5 Respuesta La A.

95- $y=\sqrt{x}-8x=(x)^{1/2}-8x$ de donde $y\& 1/2(x)^{1/2-1}-8=\dfrac{(x)^{-1/2}}{2}-8=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-8=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}-8$

Respuesta La A.

96- Y = $(x^2 - 8x)^{1/2} \rightarrow Y' = 1/2\,(x^2 - 8X)^{1/2\ -1} * (2x - 8)$; $Y' = Y' = \dfrac{2x-8}{2\left(x^2-8x\right)^{1/2}}$

$Y' = \dfrac{x-4}{\sqrt{\left(x^2-8x\right)}}$ Respuesta La E.

Ojo (2x – 8) es la derivada de x^2 - 8x y es la llamada derivada interna.

97- Y = $Y = \dfrac{3x-5}{x+1}$ $\quad Y' = \dfrac{(x+1)-(3x-5)*1}{(x+1)^2} = \dfrac{3x+3-3x+5}{(x+1)^2}$; $\quad Y' = \dfrac{8}{(x+1)^2}$

Hemos aplicado el procedimiento para la derivada de un cociente. Recuérdese que si

$f_{(x)} = \dfrac{m_{(x)}}{g_{(x)}}\ f'_{(x)} = \dfrac{m'_{(x)}\,g_{(x)} - m_{(x)}\,g'_{(x)}}{g_{(x)^2}}$ Respuesta La A.

98- $Y = \dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \dfrac{3-(x)^{1/2}}{(2x)^{1/2}}$ luego:

$$Y' = \frac{\dfrac{-(2x)^{1/2}}{2(x)^{1/2}} - \dfrac{\left(3-(x)^{1/2}\right)2}{2(x)^{1/2}}}{2x} = \frac{\dfrac{-\sqrt{(2)}}{2} - \dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}}{2x}$$

$$Y' = \frac{\dfrac{-2\sqrt{x}\ -6-2\sqrt{x}}{2\sqrt{2x}}}{2x} = \frac{-4\sqrt{x}\ -6}{4x\sqrt{\ 2x}}$$

$Y' = \dfrac{-2\sqrt{x}\ -3}{2x\sqrt{\ 2x}}$ Respuesta La C.

99- $Y = \dfrac{\sqrt{\left(3x^2-1\right)}}{\sqrt{(3x+1)}} = \dfrac{\left(3x^2-1\right)^{1/2}}{(3x+1)^{1/2}}$; $\quad Y' = \dfrac{\dfrac{6x(3x+1)^{1/2}}{2\left(3x^2-1\right)^{1/2}} - \dfrac{\left(3x^2-1\right)^{1/2} * 3}{2(3x+1)^{1/2}}}{(3x+1)}$

$$Y' = \frac{\dfrac{3x(3x+1)^{1/2}}{\left(3x^2-1\right)^{1/2}} - \dfrac{3\left(3x^2-1\right)^{1/2}}{2(3x+1)^{1/2}}}{3x+1} \qquad Y' = \frac{\dfrac{6x(3x+1)-3\left(3x^2-1\right)}{2\left(3x^2-1\right)^{1/2}(3x+1)^{1/2}}}{3x+1}$$

Simplificando obtenemos: $\dot{Y}=\dfrac{9x^2+6x+3}{2(3x+5)\sqrt{(3x^2-1)(3x+1)}}$ Respuesta La E

100- Y = 2 cosx → Y’ = 2 * (- senx) = -2senx. Respuesta La D.

101- Y = sen2x → Y’ = cos2x * 2 = 2 cos2x. 2 es la derivada de 2x, es decir, la derivada interna. Respuesta La A.

102- $Y=\tan x=\dfrac{\text{senx}}{\cos x}$ $\qquad \dot{Y}=\dfrac{\cos x*\cos x-\text{senx}(-\text{senx})}{\cos^2 x}$

$\dot{Y}=\dfrac{\cos^2 x\ +\ \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad \dot{Y}=\sec^2 x$ Respuesta La B.

103- $\dot{Y}=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad \dot{Y}=\dfrac{0-(-\text{senx})}{\cos^2 x}=\dfrac{\text{senx}}{\cos^2 x};$ $\qquad \dot{Y}=\dfrac{\text{senx}}{\cos x}*\dfrac{1}{\cos x}=\tan x\ \sec x$
Respuesta La A.

104- Y = senx – cosx Y’ = cosx - (-senx): Y’ = cosx + senx.

Respuesta La D.

105- Y = sen2xcosx Y’ = 2cos2x * cosx + sen2x * (-senx)

Y’= 2cosxcos2x – senxsen2x. Respuesta La E.

106- $Y = x^3\cos 2x$ $\quad Y' = f_{(x)}' = 3x^2 \cos 2x + x^3 (-\text{sen}2x)* 2$
$Y'= 3x^2 \cos 2x – 2x^3 \text{sen}2x$
$Y''= f''_{(x)} = 6x \cos 2x + 3x^2 (-\text{sen}2x) * 2 – 6x^2 \text{sen}2x + (-2x^3 \cos 2x) * 2$
$Y'' = 6x \cos 2x – 6x^2 \text{sen}2x – 6x^2 \text{sen}2x – 4x^3 \cos 2x$
$Y'' = 6x \cos 2x – 12x^2 \text{sen}2x – 4x^3 \cos 2x$
Respuesta La E.

107- $Y=(x)^{1/2}\text{senx}$ $\qquad \dot{Y}=\dfrac{\text{senx}}{2(x)^{1/2}}+(x)^{1/2}\cos x$

$\dot{Y}=\dfrac{\text{senx}}{2\sqrt{x}}+\sqrt{(x)}\cos x$

$\ddot{Y}=\dfrac{2\cos x*\sqrt{x}-\text{senx}*\left(2/2\sqrt{x}\right)}{4x}\ +\ \dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{(x)}\text{senx}$

$\ddot{Y}=\dfrac{2\sqrt{(x)}\cos x-\left(\text{senx}/\sqrt{x}\right)}{4x}\ +\ \dfrac{\cos x-2x\text{senx}}{2\sqrt{x}}$

$$\ddot{Y} = \frac{2x\cos x - \operatorname{sen}x}{4x\sqrt{x}} + \frac{\cos x - 2x\operatorname{sen}x}{2\sqrt{x}}$$

$$\ddot{Y} = \frac{2x\cos x \;-\; \operatorname{sen}x \;+\; 2x\cos x \;-\; 4x^2\operatorname{sen}x}{4x\sqrt{x}}$$

$$\ddot{Y} = \frac{4x\cos x \;-\; \operatorname{sen}x\left(1 + 4x^2\right)}{2x^{3/2}}$$

Respuesta La E.

108- Y = cosx Y' = -senx

Y" = -cosx

Y"' = senx

Respuesta La A.

109- Y = 2senxcosx Y' = 2cosxcosx + 2senx (-senx)

$Y' = 2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x$

Y" = 2 * 2cosx (-senx) + (-2 * 2senx * cosx)

Y" = - 4cosxsenx – 4 cosxsenx

Y" = - 8 senxcosx Respuesta La A.

NOTA: La derivada de un producto: si $\mathbf{f_{(x)} = g_{(x)} * h_{(x)}}$ Entonces: $\mathbf{f'_{(x)} = g'_{(x)} * h_{(x)} + g_{(x)} \; h'_{(x)}}$

110- Para hallar los mínimos o máximos, derivamos la función, se iguala a la derivada a cero, y se hallan las raíces de la derivada, dichas raíces se colocan en la segunda derivada. Si al reemplazar la raíz en la segunda derivada da un valor mayor que cero, la raíz genera mínimo, si la segunda derivada da un valor menor que cero, la raíz genera un máximo.

$Y = 3x^3 - 4x + 3$ $Y' = 9x^2 - 4$

$0 = 9x^2 - 4$ $x^2 = 4 / 9$ $x = \pm\ 2 / 3$

Y" = 18x Y" = 18(2 / 3) = 12 luego 2 / 3 es un mínimo.

Y" = 18x Y "= 18(- 2/ 3) = -12 luego -2/3 es un máximo.

Respuesta La A.

111- Respuesta La D.

112-. $Y = x^3 - 9x^2 + 3$ $Y' = 3y^2 - 18x$

Y" = 6x – 18

$Y' = 0 = 3x^2 - 18x$ $x^2 - 6x = 0 : x (x - 6) = 0$

De donde x = 0 ó x = 6

Para x = 0 Y" = 6x – 18 Y" = 6 * 0 – 18 Y" = -18 máximo.

Para y = 6 Y" = 6 * 6 – 18 Y" = 36 – 18 Y" = 18 mínimo.

Respuesta La E.

113-. Y = 1 /(x – 1) para hallar las asíntotas verticales se despeja en función de **x** y se analiza los valores que no pertenecen al dominio de la función, esto es, los valores no admisibles de **x**.
En este caso **x** ≠ 1 es una asíntota vertical.
Para hallar las asíntotas horizontales despeja **x** en función de **y**.

y (x – 1) = 1 xy – y = 1
xy = 1 + y
x = (1 + y) / y

Ahora analizamos los valores no admisibles de **y**.

y ≠ 0 o es una asíntota horizontal

Respuesta La B.

114- $y = \dfrac{a^3}{(x-b)^2}$ $x \neq b$

b es una asíntota vertical ya que **x** se puede aproximar a **b** tanto como queramos pero no puede tomar el valor de **b**.

Respuesta La A.

115-. Esto es una aplicación de máximos y mínimos.

Volumen del cilindro: v = πr^2 * h donde **h** es la altura.

Área de la base: $A_b = \pi r^2$

Área total: $A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Recuérdese que el cilindro tiene dos bases

$V = \pi r^2 h$ (1) $H = \dfrac{V}{\pi r^2}$

$A_T = 2\pi r * \dfrac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2$

$A_T = \dfrac{2V}{r} + 2\pi r^2$ derivando con respecto a r

$\dfrac{dA}{dr} = \dfrac{-2V}{r^2} + 4\pi r$

Igualando a cero la primera derivada:

$0 = \dfrac{-2v}{r^2} + 4\pi r$ $\dfrac{2v}{r^2} = 4\pi r$

$2V = 4\pi r^3$ $V = 2\pi r^3$ (2) igualando (1) y (2)

πr^2 h = 2πr^3 h = 2r. El lector puede verificar que este valor da un área mínima.
Respuesta La D.

116- $\int x^3 dx = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} + c = \dfrac{x^4}{4} + c$. Respuesta La A.

117- Esta integral es inmediata:

$\int \cos x dx = \text{sen} x + c$. Respuesta La C.

118- $\int \left[\left(5x^3 - 3x\right) x \right] dx = \int \left(5x^4 - 3x^2\right) dx = \dfrac{5x^5}{5} - \dfrac{3x^3}{3} + C = x^5 - x^3 + C$
Respuesta La B.

Las anteriores integrales son indefinidas, no tienen fronteras (o limites), y dependen del parámetro o constante de integración c.

119- $\int_1^2 \left(x^2 - 1\right) dx$ esta es una integral definida:

$$\int_1^2 \left(x^2 - 1\right) dx = \int_1^2 x^2 - \int_1^2 1\, dx = x^3/3 \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{(2)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} - (2-1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{7}{3} - \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$$

Respuesta La A.

120- $\int_0^\pi \text{sen}^2 x\, dx = \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos^2 x\, dx$

$$\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \frac{(\cos 2x + 1) dx}{2} = \int_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos 2x + 1) dx = \int_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\, dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x\, dx = \frac{x}{2}\int_0^\pi - \frac{1}{2}(\text{sen} 2x) * \frac{1}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{(\text{sen} 2\pi)}{4} = \frac{\pi}{2} - 0$$

Luego $\int_0^\pi \text{sen}^2 x\, dx = \dfrac{\pi}{2}$. Respuesta La A.

121- $\int_0^{2\pi} \text{sen} x\, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = \cos 0 - \cos 2\pi = 1 - 1 = 0$

Respuesta La B.

122- $\int_0^{\pi/2} 3\cos^2 x\, dx = 3\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = 3\int_0^{\pi/2} \dfrac{(\cos 2x + 1) dx}{2}$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x \; dx + \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} 1\, dx = \frac{3}{2} * \frac{1}{2} \operatorname{sen}2x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{3x}{2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 3/4 \;\left(\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\theta\right) \; + 3/2 \;\left(\pi/2\right) \; = \; 0 + \; 3\pi/4$$

Respuesta La A.

123- Recordemos que la pendiente se define:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \rightarrow \; m = \frac{2-(-4)}{5-3} \; = \; \frac{6}{2} \; = 3$$. Respuesta La B.

124- $m = \dfrac{\frac{-1}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{7}{8}} \; = \; \dfrac{-1}{\frac{10-7}{8}} \; = \; \dfrac{-1}{\frac{3}{8}} \; = \; \dfrac{-8}{3}$. Respuesta La A.

125- $x^2 + y^2 + 2x – 4y - 20 = 0$ llevemos la ecuación a la forma:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$ (1)

$(x^2 + 2x) + (y^2 – 4y) = 20$ agrupando términos.

$(x^2 + 2x + 1)+(y^2 – 4y + 4) = 20+1+4$ completando los trinomios cuadrados perfectos.

$(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 5^2$

Luego comparando con la ecuación (1) vemos que R = 5. Respuesta La A.

126- El centro esta dado por: C (h, k) = (-1, 2). Respuesta La D.

127- Igual que en el ejercicio 125:

$x^2 + y^2 + 6x – 2Y + 1 = 0$

$(x^2 + 6x) + (y^2 – 2y) = -1$

$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 – 2y + 1) = -1 + 9 + 1$ completando cuadrados

$(x + 3)^2 + (y – 1)^2 = 3^2$

Luego el centro es: (-3, +1). Respuesta La B.

128- $4x^2 + 4y^2 – 4x + 8y = 11$

$(4x^2 – 4x) + (4y^2 + 8y) = 11$ agrupando:

$4(x^2 - x) + 4 (y^2 + 2y) = 11$

$(x^2 – x) + (y^2 + 2y) = 11 / 4$

$(x^2 – x + (1 / 4)) + (y^2 + 2y + 1) = 11/4 +1/4 + 1$ completando cuadrados

$(x – (1/2))^2 + (y + 1)^2 = 2^2$ el radio es igual a 2. Respuesta La B.

129- $x^2 - 6x + y^2 + 8y = C$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = C$ agrupando

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = C + 9 + 16$ completando cuadrados:

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25 + C$

Se requiere que $25 + C = 4$ $C = -21$. Respuesta La A.

130- $(y - 2)^2 = - (x + 3)$ comparando con la ecuación:

$(y - k)^2 = -4p < (x - h)$

El vértice es (h, k) esto es (2, - 3)

El foco es: (h + p, k)

Además: - 4p = -1 p = 1/4 luego el foco es: (2+1/4, -3) = (9/4, -3)

La directriz es: x = h – p x = 2 – ¼ x = 7/4. Respuesta La A.

131- $4x - y^2 - 2y - 33 = 0$ organizando:
$4x = y^2 + 2y + 33$ $4x = (y^2 + 2y+) + 33$

Completando el trinomio: $(y^2 + 2y + 1) = 4x + 1 - 33$

$(y + 2)^2 = 4x - 32$

$(y + 2)^2 = 4(x - 8)$

Luego el eje de la parábola es horizontal, el vértice es (h, k) = (8, 2)
El foco es (h + p, k) 4p = 4 p = 1 de donde foco = (8 + 1, -2) = (9, -2)
La directriz x = h – p = 8 - 1 = 7. Respuesta La A.

132- $y^2 + 4y = -8x + 12$ completando el trinomio:
$y^2 + 4y + 4 = -8x + 12 + 4$
$(y + 2)^2 = -8(x - 2)$ de donde el vértice es (2, -2). Respuesta La C.

133- Respuesta La A.

134- La ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(Y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{con centro en } (h,\ k)$$

Comparando: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ el centro es (0,0). Respuesta La B.

135- Organizando la ecuación:

$$\frac{x^2}{12^2} + \frac{Y^2}{13^2} = 1$$

$$C = \sqrt{\left(13^2 - 12^2\right)} = \sqrt{25} \qquad C = 5$$

Los focos son: (h, k + c) y (h, k - c)

De donde $f_1 = (0, 5)$ y $f_2 = (0, -5)$.

Respuesta la B.

136- Organizando la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{1^2} + \frac{(y+4)^2}{(1/2)^2} = 1 \qquad C = \sqrt{\left(1^2 - (1/2)^2\right)} = \sqrt{(1-1/4)}$$

$C = \sqrt{3/2}$ El centro es (- 2, - 4)

Los focos serán: $f_1 = \left(-2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -4\right) = \left(\frac{-4+\sqrt{3}}{2}, -4\right)$

137- Organizando la ecuación:

$12x^2 + 20y^2 - 12x + 40y - 37 = 0$

$(12x^2 - 12x) + (20y^2 + 40y) = 37$

$12(x^2 - x) + 20(y^2 + 2y) = 37$

$12(x^2 - x + 1/4) + 20(y^2 + 2y + 1) = 37 + 12 * 1/4 + 20 * 1$

$12(x - 1/2)^2 + 20(y + 1)^2 = 6$

$$\frac{(x-1/2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1 \qquad \frac{(x-1/2)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{(y+1)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$$

Vemos que el centro es: (1 / 2, -1). Respuesta La E.

138- $(36x^2 + 48x) + (9y^2 - 36y) = - 43$

$36 (x^2 + 4/3x) + 9 (y^2 - 4y) = - 43$

$36 (x^2 + 4/3x + 4/9) + 9 (y^2 - 4y + 4) = - 43 + 36 * 4/9 + 9 * 4$

$36 (x + 2/3)^2 + 9 (y - 2)^2 = - 43 + 16 + 36$

$36 (x + 2/3)^2 + 9 (y - 2)^2 = 9$

$4 (x + 2/3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

$$\frac{(x+2/3)2}{1/4} + \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1 \qquad \frac{(x+2/3)^2}{(1/2)^2} + \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1$$

Tenemos que $C = \sqrt{\left(1^2 - (1/2)^2\right)}$

$C = \sqrt{3/2}$

F_1= (h, k + c) f_2 = (h, k – c)

$f_1 = \left(-2/3,\ 2 + \left(\sqrt{3/2}\right)\right)$ $f_2 = \left(-2/3,\ 2 - \left(\sqrt{3/2}\right)\right)$ Respuesta La E.

139- Ordenando la ecuación:

$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ Comparando con la ecuación de la hipérbola

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Centro (h, k) ; luego el centro es: (0,0).

Respuesta La A.

140- Organizando la ecuación:

$\frac{(y-1)^2}{(1/2)^2} - \frac{(x-3)^2}{(1/3)^2} = 1$ Obsérvese que cuando el denominador de **y** es mayor que denominador de **x**, el eje principal es paralelo al eje Y, nos dice que la hipérbola (o también la elipse) esta “parada”.

Como: V_1 = (h, k + a) ; V_2 = (h, k – a)

V_1 = (3, 1 +1/2) ; V_2 = (3, 1 - 1/2)

V_1 = (3, 3/2) ; V_2 = (3, 1 /2) Respuesta La B.

141- $(x^2 + 2x) – (9y^2 + 54y) = 81$

$(x^2 + 2x) – 9 (y^2 + 6y) = 81$

$(x^2 + 2x + 1) – 9(y^2 + 6y + 9) = 81 + 1 – 81$

$(x + 1)^2 – 9 (y + 3)^2 = 82 – 81$

$\frac{(x+1)^2}{1^2} - \frac{(y+3)^2}{(1/3)^2} = 1$

V_1 = (h + a, k) ; V_2 = (h – a, k)

V_1 = (-1 + 1, -3) ; V_2 = (-1 – 1, -3)

V_1 = (0, - 3) ; V_2 = (-2, -3). Respuesta La C.

142- Respuesta La A.

SOLUCION AL TEST I DE FISICA

1- Una cantidad escalar es aquella que queda completamente definida al dar solamente su magnitud y sus unidades.

2- Cantidad vectorial es aquella que para quedar bien definida debe darse además de su magnitud, también su dirección y sentido

3- VECTORIALES: Velocidad, aceleración, desplazamiento y fuerza.
ESCALARES: Masa, tiempo, longitud, densidad, temperatura, energía.

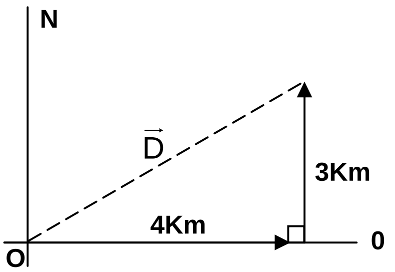
4- Eso es cierto, tal es el caso del cuerpo suspendido en un resorte que ejecuta un M.A.S. en el cual la velocidad y la aceleración tienen sentidos opuestos.

5- Cuando el vector forma un ángulo con el eje Y, simplemente cambian las funciones, esto es, la proyección sobre el eje Y es igual al vector multiplicado por el coseno del ángulo, y la proyección del vector sobre el eje X es igual al vector multiplicado por el seno del ángulo. El anterior es el caso típico del plano inclinado, donde se rotan los ejes para facilitar los cálculos.

6- Por el teorema de Pitágoras:

$D^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; $D = 5$ km.

Es decir, la distancia pedida es 5 Km.

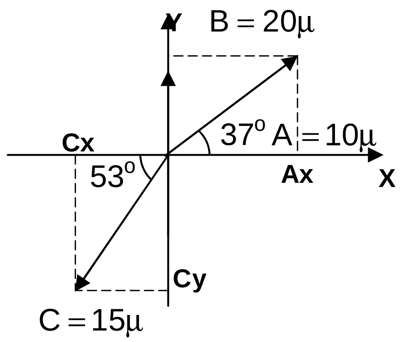


7- Según al siguiente grafica:

$\sum F_x = A_x + B_x + C_x = 10 \cos 37 - 15 \cos 53 = 10 * 0,8 - 15 * 0,6 = 8 - 9 = -1$

$\sum Fy = A_y + B_y + C_y = 10 sen37 + 20 - 15 sen53 = 10 * 0,6 + 20 - 15 * 0,8 = 6 + 20 - 12 = 14$

$$R = \sqrt{\left(\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2\right)} = \sqrt{\left((-1)^2 + (14)^2\right)} = \sqrt{(197)}$$



8- Cuando se nos dice que un móvil parte del reposo se nos esta comunicando que su velocidad inicial es cero....

9- Como su nombre lo dice, el M.R.U. se caracteriza por tener velocidad uniforme, es decir, su velocidad es constante.

10- El M.R.U.A. se caracteriza por tener aceleración constante.
Nótese que el M.R.U. es movimiento particular del M.R.U.A. cuando la aceleración además de ser constante es cero.

11- Las que pueden considerarse como magnitudes fundamentales del sistema M.K.S. son: METRO, KILOGRAMO Y SEGUNDO.

12- Las magnitudes fundamentales del sistema C.G.S. son: CENTIMETRO, GRAMO Y SEGUNDO.

13- La “línea” que describe un móvil al moverse se llama: TRAYECTORIA

15- La grafica de posición contra tiempo de un móvil animado con M.R.U. es una línea recta, y la pendiente de dicha recta es la velocidad del móvil.

16- La pendiente de la línea que surge al graficar la velocidad contra el tiempo es la aceleración.

17- Falso. Sobre un cuerpo que no esta acelerado puede estar actuando muchas fuerzas, lo que puede pasar, es que la resultante de dichas fuerzas sea cero.

18- La única fuerza que actúa sobre el guijarro después de lanzado es su propio peso, puesto que el único cuerpo que interactúa con el es la tierra. (Obviamente, despreciando la resistencia del aire).

19- No necesariamente, porque puede ser que la aceleración sea constante pero negativa, en tal caso la velocidad disminuiría. De otro lado, la velocidad puede ser constante en magnitud y la aceleración constante, como en el caso de un cuerpo que gira uniformemente, atado a una cuerda en una circunferencia horizontal.

20- Desde luego, el ejemplo claro es el de una piedra que se lanza verticalmente hacia arriba, la única fuerza que actúa es su peso, y actúa en dirección vertical hacia abajo y el cuerpo asciende. O también, la piedra lanzada horizontalmente, la fuerza que actúa es su peso y esta sobre la vertical, mientras que la trayectoria es una parábola. (Ignorando la resistencia del aire).

21- La parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos es la mecánica que a su vez se divide en: a) Cinemática b) Estática c) Dinámica.

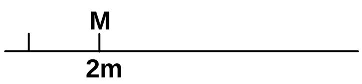
22- Lo que sucedió es que el **Newton** (N) es una unidad de fuerza, mientras que las unidades de la velocidad pueden ser: metros /segundos; centímetros / s.; kilómetros /hora; centímetros / minuto; etc., es decir, distancias sobre tiempo.
Dar velocidades en **N** es como ir a un almacén y solicitar dos segundos de lino...

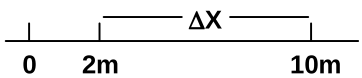
23- Sabemos que la velocidad es un vector, y el llamado velocímetro solo nos da el valor numérico de la velocidad, esto es, nos da la celeridad o rapidez, pero no la dirección y el sentido.

24- El llamado padre de la física es Galileo Galilei.

25- Llega primero al suelo el cuerpo de mayor masa, demostrémoslo: Sea M la masa de cualquiera de los cuerpos, al soltar el cuerpo, queda bajo el influjo de dos fuerzas, su peso y la resistencia del aire. La resistencia del aire va en sentido opuesto al de la caída del cuerpo. Aplicando la segunda ley de Newton nos queda:
Mg - f = Ma donde F es la fuerza de resistencia. Dividiendo por M: g – F / M = a. Aquí aparece la relación F /M, obsérvese que entre mayor sea la masa del cuerpo M, menor es la anterior fracción, luego el cuerpo de mayor masa llega primero al suelo, ya que esta mas acelerado.

26- Primera posición segunda posición

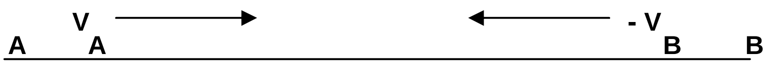




El desplazamiento Δ**x** esta dado por: $\Delta x = x_2 - x_1 = 10-2 = 8$ m. La velocidad es:

$$V = \frac{\Delta x}{t} = \frac{8}{4} = 2 m/s$$

27- La ecuación general es de la forma: $x = vt + x_0$ donde **V** es la velocidad y $\mathbf{x_0}$ la posición inicial. Con los datos dados, la ecuación de la posición queda: x = 5t + 4 la velocidad es constante!!!

28-


Ecuaciones del auto **A**

$V_A = 30$ m /s

$x_{0A} = 0$

$x_A = 30T$

Ecuaciones del auto **B**

$v_B = -30$ m/ s

$x_{0\,B} = 48$m

$x_B = -30t + 480$

Los autos chocaran cuando $x_A = x_B$, Luego:

30t = -30t + 480 ; 30t + 30t = 480 ; 60t = 480 ; t = 8 s. Luego los autos chocaran después de transcurridos 8 segundos.
La distancia que recorren los autos es la misma puesto que tienen igual velocidad. Reemplazando t en cualquiera de las ecuaciones de posición: x = 30t = 30 * 8 = 240m.

29- Ecuaciones:

$V = at + v_0$ pero $a = -g$ (van en sentido opuesto al del movimiento)

$V = -gt + v_0$ (1)

$V^2 = v^2 + 2ay$ (2)

$y = -1 / 2\ gt^2 + vt$ (3). Cuando el cuerpo alcance su altura máxima su velocidad será cero. Reemplazando en la ecuación (1):

$0 = -10t + 50$: $10t = 50$; $t= 50 /10$; $t = 5$ segundos. Es decir, la piedra asciende durante 5 segundos. Reemplazando **t** en (3):
$y = -1/2 * 10 * 5^2 + 50 * 5 = -5 * 25 + 50 * 5 = -125 + 250 =$ m
El tiempo que requiere para que la piedra se halle a una altura de 20 m, lo hallamos utilizando la ecuación (3):

$20 = -1/2 * 10 * t^2 + 50t$; $-5t^2 + 50t – 20 = 0$ simplificando y multiplicando por – 1:

$T^2 - 10t + 4 = 0$. De igual hallamos los valores de **t** que son:

$T_1 = 9{,}58$s; $t_2 = 0{,}41$seg. Aparecen dos tiempos, puesto que la piedra pasa dos veces por el mismo punto, en su ascenso (0,41s), y en su descenso (9,58s).

30- Como es caída libre tenemos:

$Y = h = 1 /2\ gt^2 = 1 /2 * 10 * t^2 = 5t^2$. El tiempo que duraría la caída es:

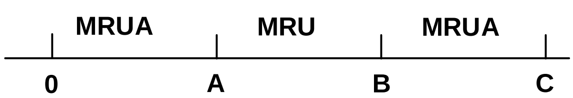
$t = \sqrt{(h/5)}$; $= \sqrt{(20/5)}$; $t = \sqrt{4} = 2s$. Luego la caída duraría 2 segundos, pero obsérvese que "superman" llega un segundo después, luego, solo posee un segundo para salvar al estudiante. La ecuación para "superman" queda:

$h = 1 /2\ gt^2_1 + v_0t$; $h= 5t^2_1 + v_0t$, despejando $\mathbf{V_0}$: $V_0 = \dfrac{h - 5t_1^{\ 2}}{t_1} = \dfrac{20 - 5 * (1)^2}{1} = 15m/s$

Luego "Superman" debe lanzarse con una velocidad inicial de 15m/s, para salvar al estudiante justo antes de chocar con el suelo.
La altura de la azotea para la cual ni "superman" puede salvar al estudiante, será igual a la distancia que ha descendido el muchacho hasta el momento en que aparece el súper héroe, es decir, un segundo, así:

$h = 1 /2 * gt^2 = 5(1)^2 = 5m$. Es decir, si la terraza tuviera 5mts, ni "superman" podría salvar al estudiante.

31- Este tipo de ejercicios es mejor analizarlos por los trayectos.



Trayecto 0A
$V_0 = 0$
$A = 4m /s^2$

T = 5s
$X_{0A} = 1/2 * at^2$; $x_{0A} = 0,5 * 4 * 5^2 = 2 * 25 = 50m$; $v_{0A} = at = 4 * 5 = 20m/s$.

Trayecto AB
$V_0 = v_{0A} = 20m/s$
$X_0 = x_{0A} = 50m$
$X_{AB} = v_0 t + x_0$
T = 10s. $X_{AB} = 20 * 10 + 50 = 250m$

Trayecto BC
$V_0 = V_{AB} = 20m/s$
$X_0 = X_{AB} = 250m$
V = 0 (el móvil para)
$X_{BC} = 200m$.   Utilizando la ecuación: $V^2_{BC} = V^2_{0A} + 2aX_{BC} = (20)^2 + 2*a*(200)$ pero
$V_{BC} = 0$, de donde $a = \frac{-20^2}{2*200} = \frac{-400}{400} = -1\, m/s^2$
(Es negativa porque va en contra del movimiento)
Como $V_{BC} = at + V_{0A}$ tenemos que t = 20 segundos.

Observemos que en los primeros 5 segundos es un MRUA y recorre 50m, 5 segundos después de iniciado el movimiento es un MRU. Luego, el espacio recorrido entre los instantes 5 y 10:

$X_{5-10} = 20 * 5 = 100m$.
La distancia total recorrida es:
250 metros que recorre en los 2 primeros trayectos más 200 metros que recorre en el ultimo trayecto, esto es, el recorrido total es 450 m, ya hallamos que el tiempo de frenado es T_{BC} = 20 segundos.
La aceleración del ultimo trayecto fue de -1 m/s^2.

32- dicha velocidad se mide en centímetros sobre segundos: cm/s.

33- Asumiendo que la posición inicial es cero ($x_0 = 0$), la posición esta dada por la formula: x = vt, luego la respuesta es la B.

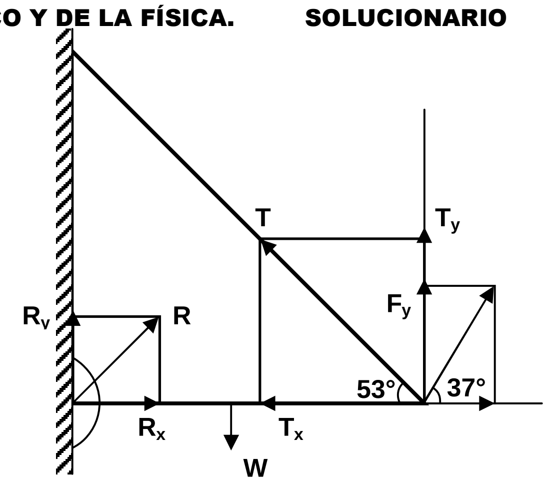
34- En el anterior ejercicio el movimiento era uniforme, al igual que este, la expresión de la posición es x = vt.
Respuesta La A.

35- Vemos que la mayor velocidad inicial la presenta la grafica B, y que además es constante y con un valor de 4.

36- De 1 a 3 son muestras de equilibrio: inestable, indiferente estable.

37- Condiciones de equilibrio:

$\Sigma F_x = 0$; $R_x + F_x - T_x = 0$; $R_x = T_x - F^x$ (1)



$\Sigma F_y = 0$; $R_y + F_y + T_y - w = 0$; $R_y = w - T_y - F_y$ (2)

$\Sigma F_0 = 0$; $T_y * x + F_y * x - w * x/2 = 0$

Simplificando:

$T_y + F_y = w/2$; $T_y = w/2 - F_y$, luego:
Tsen 53°= 20 /2 – 10sen37°= 10 – 10 * 0,6
T * 0,8 = 4 ; T = 4/ 0,8 ; T= 5kg – f

Como:

$R_x = T_x - F_x$: R_x = 5 * cos53° - 10cos37°
R_x = 5 * 0,6 – 10 * 0,8 = 3 – 8= - 5kg – f
R_y = 20 – 5 * 0,8 – 10 * 0,6= 20 – 4 – 6 = 10kg – f

Como:

$$R = \sqrt{\left((R_X)^2 + (R_Y)^2\right)} = \sqrt{\left((-5)^2 + (10)^2\right)} = \sqrt{(125)} = 5\sqrt{5}\ \text{kg} - \text{f}$$

El signo negativo de R_x indica que esta fuerza va en sentido contrario al que asumimos primeramente.

38- La primera ley de Newton es también llamada ley de la INERCIA o del equilibrio. Dice así: Todo cuerpo permanecerá en reposo o en movimiento con velocidad constante, a no ser que intervenga una fuerza externa y altere su estado primitivo.

39- La segunda ley de Newton dice: la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la resultante de todas las fueras aplicadas a el, e inversamente proporcional a la masa del cuerpo y dirigida a lo largo de la resultante de las fuerzas.

40- La tercera ley de Newton dice: si dos cuerpos interactúan, la fuerza que ejerce el primero sobre el segundo es igual y de sentido opuesto a la que ejerce el segundo sobre el primero. Si una de las fuerzas es la acción de la otra se llama reacción, y no se anulan porque actúan sobre cuerpos diferentes.

41- Cuando definimos la segunda ley de Newton vimos que no es la fuerza la consecuencia de la aceleración, sino, todo lo contrario, de tal manera que la definición correcta es la dada en el punto 7.

42- No necesariamente, porque un cuerpo puede estar en equilibrio trasnacional, pero, al mismo tiempo estar rotando y acelerado.

43- Si no se desprecia la resistencia del aire, el tiempo que tardara en bajar será mayor, puesto que desde el comienzo del movimiento, el cuerpo empieza a perder energía a causa de los constantes choques con las moléculas de aire. Al disminuir la energía cinética disminuye la velocidad.

44- La celeridad o rapidez, son cantidades escalares que definen el valor numérico de la velocidad, mientras que la velocidad es una cantidad vectorial.

45- Uno de los muchos ejemplos que se pueden citar para tal afirmación, es el de la carretilla, el caballo y la tierra. De no interactuar tierra, carretilla y caballo, este no podría mover la carretilla puesto que según la tercera ley de Newton, la fuerza que el caballo hace sobre la carretilla es igual y opuesta a la que hace la carretilla sobre el caballo.
Imagínese el caballo tratando de arrastrar la carretilla en una superficie cubierta de hielo...

46- Falso, el pulimento llevado más allá de cierto límite, en lugar de disminuir la fricción la aumenta sustancialmente a tal grado que puede anquilosar el contacto. Un ejemplo de lo anterior lo encontramos en el contacto de la rueda de ferrocarril y el riel, ambos extremadamente pulidos para garantizar una extrema cercanía entre los átomos de estas superficies, de forma que se provoquen un buen “agarre”.

47- Hay varios fenómenos de los que se presenta la “aceleración acelerada” tal es el caso de un cuerpo que oscila unido a un resorte, cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio la aceleración es cero, y de ahí en adelante empieza a incrementarse hasta ser máxima en los extremos del movimiento.
Una cadena que se deslice desde una mesa es otro ejemplo de incremento de la aceleración.

48- Es cierto. En dichas tablas, aparecen cosas como: madera sobre madera, acero sobre acero, etc... Pero de no existir un agente externo entre las superficies en contacto, los dos cuerpos se comportarían como uno solo, es como si se “soldasen” , luego, al hablar de superficies en contacto, se presupone la presencia de un agente externo, como puede ser una capa de oxido, por ejemplo.

49- El coeficiente de rozamiento es el resultado de la relación entre la fuerza de rozamiento y la fuerza normal, como la relación es por cociente, las unidades se cancelan, esto es, el coeficiente de rozamiento es ADIMENSIONAL.

50- La formula de la caída libre expresa:

$Y = 1/st^2$ donde **Y** es la distancia recorrida, **t** el tiempo transcurrido y **g** la aceleración de la gravedad.

Sacrificaremos la exactitud en pro de la comodidad, tomando $g = 10/s^2$

3 minutos equivalen a 180 segundos, reemplazando:

$Y = 1/2 * 10 * (180)^2 = 5 * 32400 = 162000$ metros = 162 km.

Conclusión, el tipo miente puesto que según la información que da, el puente tendría una altura de 162km!!. (Aún, teniendo en cuenta la resistencia del aire, la altura seria el orden de decenas de kilómetros).

51-. Datos: $M = 5kg$, $V_0 = 0$, $F = 20N$, $t = 6s$. Aplicando la segunda ley de Newton:

$F = M * a$; $a = F/M = 20/5$; $a = 4m/s^2$

Como $x = 1/2\ at^2$: $x = 1/2 * 4 * 6^2 = 72m$.

52- Datos: $V_0 = 0$; $t = 10s$; $V = 50m/s$; $M = 5kg$.

Ya que $V = at + V_0$; $50 = a * 10 + 0$, luego, $a = 50/10$, $a = 5m/s^2$. Aplicando la segunda ley de Newton $F = M * a = 5 * 5$; $F = 25N$.

53-

$\text{Datos}: V_0 = 72km/h = 72000/36000\ \ m/s$

$V_0 = 20m/s \quad V = 0; \quad \mu = 0,5.$ Aplicando

la segunda ley:

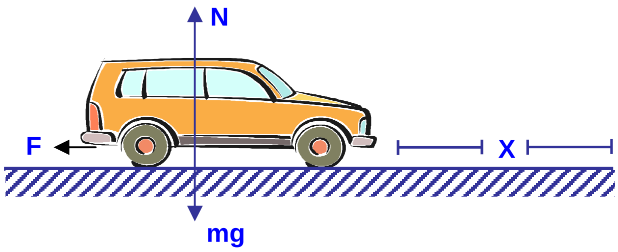
$F_x = m * a: \quad -f_r = m * a$

$F_y = 0; \quad N - mg.$ Pero f_r es igual a:

$\mu * N = \mu * mg$ reemplazando:

$-\mu * mg = ma; \quad a = -\mu g = -0,5 * 10$

$a = -5m/s^2$



Como $V^2 = V_0^2 + 2ax$; $x = \left(V^2 - V_0^2\right)/2a = -\left(20^2\right)/-10 = -400/-10 = 40m.$

Nota: en este caso, la única fuerza que actúa es la fuerza de fricción. El estudiante acostumbra a colocar (erróneamente) una fuerza EXTRA, ya que no se "explica" como va el móvil hacia un lado, y la única fuerza que actúa "tira" en sentido contrario.

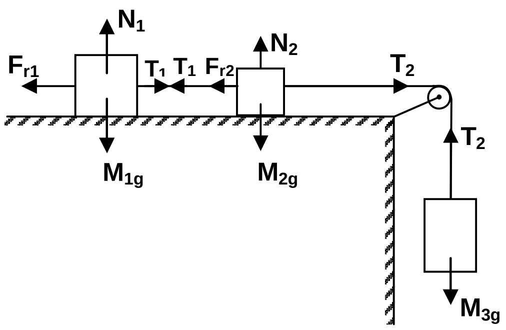
54- Cuerpo de masa M_1:

$\Sigma F_x = M_1 . a$: $T_1 - F_{r1} = m_1 a$: $T_1 = m_1 a + F_{r\,1}$ (1)

$\Sigma F_y = 0$: $N_1 - m_1 g = 0$; $N_1 = m_1 g$. Como $F_{r\,1} = UN_1$

$F_{r\,1} = Um_1 g$. Reemplazando en (1):

$T_1 = m_1 a + Um_1 g$ (2)



Cuerpo de masa M_2:

$\Sigma F_x = m_2 a$: $T_2 - F_{r\,2} - T_1 = m_2 a$; $T_2 = m_2 a + F_{r\,2} + T_1$ (3);

$\Sigma F_y = 0$: $N_2 - m_2 g = 0$; $N_2 = m_2 g$. (4) $F_{r\,2} = Un_2 = Um_2 g$ (5) colocando (2) y (5) en (3): $T_2 = m_2 a + Um_2 g + m_1 a + Um_1 g$ (6).

Cuerpo de masa M_3:

$F_y = m_3 g - T_2 = m_3 a$: $T_2 = m_3 g - m_3 a$. (7). Igualando 6 y 7:

$M_2 a + Um_2 g + m_1 a + Um_1 g = m_3 g - m_3 a$: $m_1 a + m_2 a + m_3 a = m_3 g - Um_2 g - Um_1 g$:

a ($m_1+m_2+m_3$) = g(m_3 - U (m_2+m_1)). De donde:

$$a = g\left(m_3 - U\left(m_2 + m_1\right)\right) / \left(m_1 + m_2 + m_3\right)$$

Utilizando los valores numéricos:

$$a = 10\left(50 - 0,4\left(20 + 30\right)\right) / \left(30 + 20 + 50\right) = 10\left(50 - 20\right)/100 = 300/100 = 3 m/s^2$$

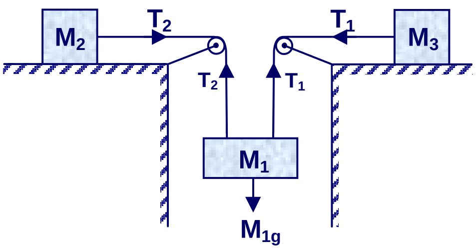
Así que: T_1 = 30 * 3 + 0, 4 * 30 * 10 = 90 + 120 = 210N.

T_2 = 50 * 10 – 50 * 3 = 500 – 150 = 350N.

Nota: Se tomo como positivo todo lo que fuera en el sentido del movimiento.

55- Tomaremos como positivo el sentido del movimiento. Cuerpo de masa m_2:

$\Sigma F_x = m_2$ a: $T_2 = m_2$ a (1)



Cuerpo de masa M_3:

$\Sigma F_x = m_3 a: \quad T_1 = m_3 a \quad (2)$

Cuerpo de masa M_1:

$\Sigma F_y = m_1 a: \quad \mathbf{m}_1 g - T_1 - T_2 = m_1 a; \quad \mathbf{m}_1 g - m_1 a = T_1 + T_2$

Reemplazando (1) y (2):

$m_1 g - m_1 a = m_2 a + m_3 a; \quad m_1 g = m_1 a + m_2 a + m_3 a:$

$a = m_1 g / \left(m_1 + m_2 + m_3\right) = 30 * 10 / \left(30 + 20 + 10\right) = 30/60$

$a = 5 m/s^2$

$T_1 = m_3$ a = 10 * 5 = 50N; $T_2 = m_2$ a = 20 * 5 = 100N.

56- Las palancas se clasifican según su género, y son:

a) primer genero: el punto de apoyo esta entre la fuerza aplicada y la resistencia. Tijera, alicates,

b) Segundo genero: la resistencia esta entre el punto de apoyo y la fuerza aplicada. Carreta, Martillo sacando un clavo.

c) Tercer género: la fuerza aplicada esta entre el punto de apoyo y la fuerza resistente o resistencia.

57- El mayor alcance de un proyectil, se logra cuando el ángulo se lanzamiento vale 45°.

58- Este es un movimiento en el plano conocido como “lanzamiento horizontal” lo trabajaremos sobre cada eje:

Eje x

$a_x = 0$

$V_{0x} = V_0 = 30m/s$

$x = V_0 t = 30t$

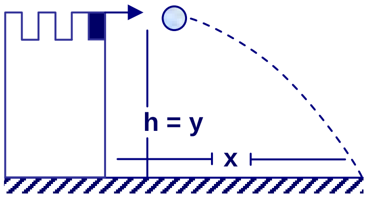
Eje y

$a_y = g$

$V_{0y} = 0$

$V_y = gt$

$y = 1/2\ gt^2$



La velocidad del móvil en cualquier instante esta dad por:

$V = \sqrt{(v^2{}_x + v^{2y})}$ de donde $v^2 = v^2{}_x + v^2{}_y$ luego, $v^2{}_y = v^2 - v^2{}_x$ como la velocidad en **x** es constante: $v^2{}_y = 50^2 - 30^2 = 2500 - 900 = 1600$ así que $v_y = 40$ m/s.
Como $v_Y = gt$; $t = v_y/g = 40/10 = 4$ segundos. La caída dura 4 segundos.
La altura de la torre es $h = y = 1/2 * gt^2 = 0,5 * 10 * 16 = 80$m.
Distancia horizontal: $x = 30t = 30 * 4 = 120$m.

59- Datos: $V_0 = 500m/s$; $x = 200m$; $y = ?$
Hallemos el tiempo en que el proyectil recorre los 200 metros.

$x = V_0\, t$ luego $t = x/V_0 = 200/500 = 0,4$ segundos.

Ahora veamos cuanto ha bajado el proyectil por causa de la gravedad en este mismo tiempo.

$y = 1/2\ gt^2 = 0,5 * 10 * (0,4)^2 = 5 * 0,16 = 0,8$ metros.

Luego, se debe apuntar 0,8 metros por encima del blanco para dar en el.

60- Este es un movimiento parabólico y lo analizaremos sobre cada eje

Eje x

$a_x = 0$

$V_x = V_0 \cos\theta$

$?\,x = V_0 \cos\theta * t$

Eje y

$a_y = -g$

$V_y = -gt + V_0\ \text{sen}\ \theta t$

$y = -1/2 gt^2 + V_0\ \text{sen}\ \theta t$

En la altura máxima V_y es igual a cero,
Luego $0 = -gt + V_0 \text{ sen } \theta$ de donde:

$t = (V_0\ \text{sen}\ \theta)/g$

Hemos despejado el tiempo de subida que designaremos por; $t_5 = 100 * 0,6/10 = 6$ s.
El tiempo total que permanece el cuerpo en el aire es el doble del tiempo de subida y lo llamaremos tiempo de vuelo: $t_v = 2t_8$.
Así que $t_v = 2 * 6 = 12$ segundos.

Para hallar la altura máxima trabajamos en **y**, utilizando el tiempo de subida:
$y = - 1/2 * 10 * (6)^2 + 100 * 0,6 * (6) = -5 * 36 + 60 * 6 = -180 + 360 = 180$m.
Para hallar el alcance horizontal trabajamos en la ecuación de **x** con el tiempo de vuelo:
$x = V_0 \cos\theta\ \ t = 100 * 0,8 * 12 = 960$m.

61- Datos: r = 5m; t = 2s; la velocidad lineal o tangencial esta dada por: $x/t = 2\pi * r/2 = \pi * 5 = 5\pi \quad m/s$

La aceleración centrípeta esta dada por: $a_c = V^2/\mathbf{r} = 25\pi^2/5 = 5\pi^2\, m/s^2$

62- Datos: $V = 108\ km/h = 108 * 1000/3600\ \ m/s = 30\ m/s$

Diámetro = 2 radios = 60 cm luego r = 30 cm = 0,3 m.

Como V = wr; w = V/r = 30/0,3 = 100 rad/s.

63- No necesariamente, la fuerza centrípeta es al fin y al cabo, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que gira, mientras que la fuerza centrifuga no siempre existe, como se puede demostrar en el análisis del dispositivo llamado péndulo cónico.
(Remitimos al lector interesado en profundizar sobre este asunto, al libro: Preguntas y problemas de Física, de L Tarasov y A Tarasova, ya que entrar en más detalles al respecto se escapa al propósito de esta guía).

64- Dicha afirmación lo que revela es un “desconocimiento “ de los principios básicos de la física elemental. Si las fuerzas se anulasen, para el caso de un satélite artificial, este, por la primera ley de Newton saldría disparado tangencialmente, y no describiría la trayectoria aproximadamente circular que efectivamente describe al rededor de la tierra.

65- Cuando un resorte responde a la ley de Hooke, es porque la fuerza aplicada al resorte es directamente proporcional a la elongación.

70- Cuerpo de masa M_a:

$\Sigma F_x = 0$; $T_1 – F_{r\,1} – M_1$ gsen37° = 0 ; $T_1 = M_1$ gsen37° + $F_{r\,1}$ (1)

$\Sigma F_y = 0$; $N_1 – M_1$ gcos37° = 0; $N_1 = M_1$ gcos37° (2) como $F_{r\,1} = UN_1 = UM_1$ = gcos37° :
Reemplazando en (1): $T_1 = M_1$ gsen37° + UM_1 gcos37° (3)

Cuerpo de masa M_b:

$\Sigma F_x = 0$; $T_2 – F_{r\,2} – T_1 = 0$; $T_2 = T_1 + F_{r\,2}$ (4)

$\Sigma F_y = 0$; $N_2 – M_2\,g = 0$; $N_2 = M_2\,g$ (5) Pero $F_{r\,2} = UN_2 = UM_2$ g.

Colocando (3) en (4) y el valor de $F_{r\,2}$ nos queda:

$T_2 = M_1$ gsen37° + UM_1 gcos37° +UM_2 g (6).

Cuerpo de masa M_c:

$\Sigma F_x = 0$; M_3 gsen53° - $F_{r\,3}$ - $T_2 = 0$; $T_2 = M_3$ gsen53° - $F_{r\,3}$ (7)

$\Sigma F_y = 0$; $N_3 – M_3$ gcos53° = 0; $N_3 = M_3$ gcos53°; como $F_{r\,3} = UN_3 = UM_3$ gcos53° esto en (7):
$T_2 = M_3$ gsen53° - UM_3 gcos53° (8) igualando (6) y (8):

M_1 gsen 37° + UM_1 gcos37° + UM_2 g = M_3 gsen53° - UM_3 gcos53°

M_1 gsen 37° + UM_1 gcos37° + UM_2 g = M_3 (gsen53° - Ugcos53°) de donde:

$$M_3 = (M_1\ gsen37° + UM_1\ gcos37° + UM_2 g)/(g\ sen53° - Ug cos53°)$$

Utilizando los valores numéricos hallamos que M_3 = 30kg (demuéstrelo)

71- Las fuerzas cuyo punto de aplicación es 0, no produce momento ya que pasan por el eje de giro. Calculamos el brazo de cada fuerza:

FUERZA	**BRAZO**
3kg – f	3m
5kg – f	6m
8kg – f	3m
4kg – f	5m

Consideramos positivos los momentos que van en contra del movimiento de las manecillas del reloj.
t_0 = 3 * 3 + 5 * 6 – 8 * 2 – 4 * 5 = 9 + 30 – 20 – 16 = 39 – 36 = 3 kg – f * m según este resultado, la barra gira en sentido contrario al de las agujas del reloj.

72- Si la fuerza esta dada en N, la masa en kilogramos la aceleración se da en m/s^2 ya que son unidades del sistema M.K.S. Respuesta La C.

73- Este ejercicio se resuelve aplicando suma de momentos igual a cero:

Así: x * 10cm – 1kg * 80cm = 0; x * 10cm = 80kg; x = 80cm / kg 10cm; x = 8kg.
Respuesta La C.

74- Al comprimir o estirar un resorte se incrementa su energía potencial elástica.

75- Según la siguiente grafica:

iiiiiiiiiiiiiiiiiii

La energía en el punto A es: E_A= **Mmg** + ½ $\mathbf{mv_0^2}$. No habiendo rozamiento toda la energía del punto A, “llega” al punto B, y se “almacena” como energía potencial elástica del resorte, así:

E_B = 1 /2 kx^2 donde k es la constante de elasticidad, **y**, **x** la distancia que se comprime el resorte. Por conservación de la energía: E_A = E_B = **mgh +1/2** $\mathbf{mv_0^2}$ = 1 /2 * kX^2 ;

2mgh + $\mathbf{mv_0^2}$= kX^2 de donde :

$$k = (2mgh + mV^2{}_0)/x^2 = (2*1*10*5 + 1*20^2)/2 = \frac{100+400}{4} = \frac{500}{4} = 125N/m$$

76- Se baso en el concepto de trabajo en física, que difiere cantidades del concepto común que se tiene de trabajo. Físicamente el trabajo de define como el producto de la fuerza, por la distancia recorrida y por el coseno del ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento. En este caso el desplazamiento es cero, luego el trabajo es nulo.

77- La energía en el punto **A** es:

$E_A = 1/2 * mV^2$. La energía en el punto **B** es:

$E_B = 1/2 * kx^2$. Por conservación de la energía:

$E_A = E_B$; $1/2 * kV^2 = 1/2 * kx^2$. de donde:

$V = x\sqrt{(k/m)}$; $V = 0{,}5\sqrt{25} = 0{,}5 * 5 = 2{,}5 \text{ m/s}$

78- Datos: m = 70kg; V =10m/seg. Energía cinética $E_c = 1/2 * mV^2 = 0{,}5 * 70 * 10^2$;

$E_C = 0{,}5 * 70 * 100 = 3500$ Julios. **OJO con las unidades!!!!**

79- Datos: $mg = 720N$; $h = 40m$; $V = 5m/s$

$E_c = 1/2 * mV^2 = 0{,}5 * 72 * 52 = 36 * 25 = 900$ **OJO: m = 720/10 = 72kg.**

$E_p = mgh = 72 * 10 * 40 = 28.800$ Julios.

$E_{total} = E_c + E_p = 900 + 28.800 = 29.700$ Julios.

80- Datos: m = 450kg; h = 20m ; t = 15 minutos = 900 segundos

OJO potencia = trabajo/unidad de tiempo, luego:

Trabajo = mgh = 450 * 20 * 10 = 90.000 julios, de donde:

P = w/t = 90.000/900 = 100 vatios. ¡¡¡OJO: vatios: unidad de potencia!!

81- La cantidad de movimiento se conserva si y solo si no actúan fuerzas externas, en este caso si hay fuerzas externas: la fuerza de rozamiento, que "aniquila" la cantidad de movimiento.

82- La forma mas sencilla es emplear bolsas de plástico u otros recipientes elásticos y exprimir el líquido de la misma forma que hacemos con el tubo de pasta dentífrica.
También puede hacerlo colocando los extremos de los recipientes de forma que se encaren sus aberturas. Entonces los mueve enérgicamente en dirección opuesta a la de vertido. El líquido adquiere una cantidad de movimiento igual a la del recipiente pero de sentido contrario. Ahora bien, la masa del liquido es mayor que la del recipiente y su aceleración será menor que de los recipientes. En este efecto, el astronauta desliza el primer recipiente fuera del líquido y lo recoge con el segundo recipiente.

83- Las colisiones o choques son de cuatro tipos, a saber:

a) Choques perfectamente elásticos.
b) Choques perfectamente inelásticos.
c) Choques imperfectamente inelásticos.
d) Choques súper elásticos.

84- La energía cinética solo se conserva en una colisión perfectamente elástica.

85- Por conservación del momentum:

$m_1 V_1 + m_2 v_2 = 10.000 * 24 + 10.000 * 0 = 240.000$ kg * m/s

Este es el momento inicial.

Después de la colisión el momento será el mismo pero lo compartirán ambos móviles:

$(m_1 + m_2) V = 240.000$ de donde $V = 240.000/20000 = 12$ m/s.

Luego los móviles se mueven como un todo después del impacto con una velocidad de 12 m/s.

86- El momento total del sistema se conserva. Los subíndices B y R representan bala y rifle respectivamente.
$m_B V_{0\,B} + m_R V_{0\,R} = m_B v_B + m_R v_R$: $0 + 0 = 0{,}05 * 280 + 4 * V_R$
De donde: $V_R = - 14/4 = -3, 5$ m/s. El signo negativo indica que el rifle se mueve en sentido opuesto al movimiento de la bala.

87- Esta es una violación al principio de la conservación de la cantidad de movimiento, pues si bien el "súper – ratón" posee una gran fuerza, requiere de un apoyo para desarrollarla y poder detener la bala, pero si esta en el aire tendría que ser "arrastrado" por la bala y resulta que la detiene, "aniquilando" la cantidad de movimiento de la misma.

88- Daremos sin demostración la formula del periodo de un cuerpo que oscila en un resorte teniendo en cuenta la masa del resorte:

$T = 2\pi \frac{\sqrt{((m + M/3))}}{k}$ Donde **m** es la masa del cuerpo que oscila, **M** la masa del resorte, y **k** la constante de elasticidad del resorte.

Como podemos ver, aparece en el numerador de la fracción sub-radical, una cantidad que incrementa la fracción. Si aumenta la fracción, aumenta el periodo de oscilación. Conclusión: cuando se tiene en cuenta la masa del resorte en el que un cuerpo oscila, el periodo de oscilación es mayor que el que tendría el mismo cuerpo oscilando en dicho resorte sin tener en cuenta la masa del resorte. (Al lector interesado en un análisis más detallado, se le remite al libro: Vibraciones y ondas, de **A. P. Frech**, donde hace un análisis muy detallado del caso).

89- Comparemos con la ecuación general del M.A.S. (Movimiento Armónico Simple):

$x = A\cos(wt + ø)$

x = 5cos (3t). Vemos que la amplitud vale 5 cm.
La frecuencia angular = w = $3s^{-1}$ La fase inicial = ø = 0
Como el periodo es: $T = 2\pi/w = 2\pi/3$ La frecuencia es el reciproco del periodo, luego:
$F = 3/2\pi s^{-1}$

90- Según la siguiente grafica vemos que: amplitud = 2m; periodo = 4s. Luego la frecuencia = 1 /4 s^{-1}. w = 2 π / T = π / 2; la fase inicial es cero.

La ecuación de posición queda: $x = 2sen(\pi/2 * t)$

91- Datos: $m = 20g = 0{,}02kg$; $k = 8N/m$; $E = 0{,}36$ Julios.

La energía del oscilador esta dada por: $E = 1/2\ kA^2$ luego:

$A^2 = E = 2E/k$; $A = \sqrt{(2E/k)} = \sqrt{(0{,}72/8)} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3m.$

El periodo es: $T = 2\pi\sqrt{(m/k)} = 2\pi\sqrt{(0{,}02/8)} = 2\pi\sqrt{(0{,}0025)} = 0{,}05 * 2\pi$

T = 0,1 * πs. De donde $F = 10/\pi\ s^{-1}$. De otro lado, $V = wA$; $V = 20 * 0{,}3$

$V max = 6m/s$ Recuérdese que $w = 2\pi/T = 2\pi/0{,}1 * \pi = 20\ s^{-1}$

92- El reciproco del periodo es la frecuencia.

93- La máxima elongación es la amplitud.

94- **LEYES DEL PENDULO**: para pequeñas amplitudes de oscilación:
a) El periodo de un péndulo simple es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud.
b) El periodo de un péndulo simple es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.
c) El periodo de un péndulo simple es independiente de la masa pendular.
d) El periodo es independiente de la amplitud.

95- En el movimiento armónico simple, la velocidad es máxima cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio.

96- En el M.A.S. la aceleración es mayor en los extremos de la trayectoria, lugares donde la velocidad es cero.

97- Sea:

$T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$ El periodo del péndulo no alterado. Haciendo los cambios nos queda el nuevo periodo:

$$T' = 2\pi\sqrt{\left(8L/(g/2)\right)} = 2\pi\sqrt{(16L/g)} = 4 * 2\pi\sqrt{(L/g)}$$

Como vemos el periodo del nuevo péndulo se ha hecho cuatro veces mayor.

98- Una vibración es un movimiento o perturbación de una sola partícula del medio, mientras que la onda es una serie de vibraciones interrelacionadas de muchas partículas y próximas.

99- La totalidad de la energía de que disponemos en la tierra ha sido trasmitida desde el sol en forma de onda, las cuales han atravesado el espacio vació (son electromagnéticas), y llegan a la tierra en forma de luz y calor.
Las ondas sonoras, por ejemplo, poseen energía con la cual hacen vibrar la membrana del tímpano, y gracias a ello podemos escuchar.

100- Una onda transporta energía, cantidad de movimiento y cantidad de movimiento angular, este ultimo como en el caso de una onda circularmente polarizada.

101- Las ondas mecánicas son aquellas que requieren de un medio para propagarse como es el caso de las ondas sonoras.
Las ondas electromagnéticas son ondas que no requieren de un medio para propagarse, como es el caso de las ondas de luz o de radio.

102- Pueden ser longitudinales o transversales.

103- La tensión esta dada por el peso de la masa de 9 kilogramos.

Luego T= mg = 9 *10 = 90N. La densidad lineal del hilo en el sistema M.K.S es $U = m/L = 0{,}5/5 = 0{,}1\ kg/m$ La velocidad de las ondas transversales es: $V = \sqrt{(T/\mu)} = \sqrt{(90/0{,}1)} = 30m/s$

104- El fenómeno de resonancia se presenta cuando un cuerpo o sistema que posee una frecuencia natural es perturbado por un agente externo, y dicho agente posee la misma frecuencia que el cuerpo o que el sistema en mención, se dice que hay resonancia.

105- Por resonancia escuchamos los sonidos que se transmiten a través del aire, por resonancia sintonizamos un radio, por resonancia se puede caer un puente que no sea aerodinámicamente estable, etc.

106- El sonido es estudiado por la acústica.

107- El sonido es una onda mecánica que requiere de un medio para desplazarse, al no haber aire en la luna, la comunicación directa es imposible y se debe utilizar el sistema de radio.

108- La razón más importante reside en que el rayo recorre un camino sinuoso. Algunos puntos de su trayectoria se encuentran mas cerca del observador que otros y por ello el sonido del trueno se extenderá. Si el punto más cercano se encuentra a 1700 m del punto más lejano, el trueno retumbara durante 5 segundos, por ser la velocidad del sonido en el aire 340 metros sobre segundo.

109-

a) **Reflexión**: Se presenta cuando un movimiento ondulatorio viaja a través de un medio y bruscamente hay cambio en la densidad, es decir, aparece un obstáculo al movimiento ondulatorio, el cual debe hacer un cambio brusco de su trayectoria.

b) **Refracción**: Fenómeno que se sucede cuando un movimiento ondulatorio se trasmite de un medio a otro, es decir, cuando un movimiento ondulatorio atraviesa la superficie de separación de dos medios de diferentes propiedades, y en los que el movimiento se propaga con velocidades diferentes.

c) **Difracción**: Se refiere al grupo de fenómenos que tienen lugar cuando un frente de onda encuentra en el cambio de su propagación un obstáculo cuyas dimensiones son del mismo orden que su longitud de onda. De otra forma: es la capacidad que poseen las ondas de flexionarse o doblarse para bordear un obstáculo. La anterior propiedad es muy notable en las ondas sonoras, ya que pueden "doblar la esquina" según expreso un eminente físico.

110- La frecuencia percibida por un observador y emitida por una fuente será mayor, cuando el observador y la fuente se acercan mutuamente, es decir, cuando van al encuentro.

111- Datos: R_1 = 10m; B_1 = 20db; B_2 = 0;

Sabemos que las intensidades son inversamente proporcionales a los cuadros de las distancias, así:

$I_2/I_1 = R_1^2/R_2^2$ De donde: $R_2^2 = R_1^2 \frac{I_2}{I_1}$. Hallamos las intensidades:

$20 = 10\ \log(I_1/I_0) = 10\ \log 10^{16} I_1$; $2 = \log\ 10^{16} I_1$; $10^2 = 10^{16} I_1$ Esto es:

$I_1 = 10^2/10^{16} = 10^2 * 10^{-16}$; $I_1 = 10^{-14}\ w/cm^2$ Como B_2 = 0, hallamos que $I_2 = 10^{-16}$

Reemplazando estos valores:

$R^2{}_2 = (10)^2 * (10^{-14})/(10^{-16}) = 10^2 * 10^{-14} * 10^{16} = 10^{2-14+16} = 10^4$ de donde $R^2 = \sqrt{(10^4)} = 10^2$.

Debe alejarse del radio 100m para no escuchar.

112- Datos: a nivel de intensidad = B_1 = 80db; B_2 = 120db; n = número de niños.

Las intensidades se relacionan por: $I_2 = nI_1$.

Hallemos las intensidades: $B_1 = 10 \log (I_1 / I_0)$ donde I_0 es una constante arbitraria cuyo valor es: $I_0 = 10^{-16}\ w/cm^2$. Reemplazando:

$80 = 10\ \log\left(I_1/10^{-16}\right) = 10\ \log\ 10^{16}I_1;\ \ 8 = \log\ 10^{16}I_1$ Propiedad de los logaritmos:

$10^8 = 10^{16}\ I_1;\ \ I_1 = 10^8/10^{16} = 10^8 * 10^{16} = 10^{-8}$ es decir: $I_1 = 10^{-8}$ w/cm^2. De manera similar hallamos que $L_2 = 10^{-4}$ w/cm^2.

Despejando n en la primera ecuación:

$n = I_2/I_1 = 10^{-4}/10^{-8} =\ 10^{-4} *\ 10^{-?} = 10^4$ Luego se requieren un total de 10.000 niños.

113- Las imágenes dadas por los espejos planos son: LATERALMENTE invertidas, virtuales, de igual tamaño que el objeto que las genera.

114- Obviamente, tal es el caso de las fotografías que se hacen tomar las “quinceañeras” al lado de un espejo plano.

115- La imagen formada en el vértice, se caracteriza porque NO es lateralmente invertida.

116- Solo se pueden “atrapar” en pantalla las imágenes reales. Las imágenes producidas por un espejo convexo son virtuales.

117- Aquí se presenta el llamado efecto DOPPLER.
Convendremos:

V_0 = Velocidad del auto mas lento (del receptor u observador).
V_f = Velocidad del auto mas rápido (de la fuente emisora).
F_0 = Frecuencia escuchada.
F_f = Frecuencia emitida.

La formula general para el efecto Doppler es:

‘’’’’’’’’’’’’’’’’’’’¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡

Observando la grafica vemos que V_f es negativa. Despejando F_0:

$F_0 = (C + V_0) * F_f/(C - V_f)$ En esta formula C es la velocidad del sonido en el aire que la tomaremos como 340m/s. Reemplazando los valores:

$F_0 = (340 + 50) * 440/(340 - 100) = 390 * 440/240 = 171600/240 = 715\ \text{hz}$

Luego, el conductor del auto mas lento escuchará una frecuencia emitida por la fuente es solo de 440hz.

118- Tenemos que:

Θ_i = ángulo de incidencia = 37°
Θ_r = ángulo de refracción = ?

Aplicando la ley de Snell:
n_1 senθ_i = n_2 senθ_r así que:

$$\text{sen}\theta r = n_1\ \text{sen}\theta / n_2 = 1{,}5 * \text{sen}\ 37°/2 = 1{,}5 * 0{,}6/2 = 1{,}5 * 0{,}3 = 0{,}45$$
$$\theta_r = \text{arcsen}(0{,}45) = 27°.$$

NOTA: n_1 y n_2 son los llamados índices de refracción relativos de los medios. Resultan del cociente entre la velocidad de la luz en el vació y la velocidad de la luz en el respectivo medio. Son adimensionales.

119- En la grafica podemos ver las trayectorias seguidas por los rayos de luz que salen de la punta de la cabeza y de la punta de los dedos de la persona. Sea:

h = longitud del espejo

H = altura de la persona.

d = distancia espejo – persona.

Aplicando funciones trigonométricas:

$\text{Tan}\ x = (H-h)/d$ De otro lado, los ángulos **x** y **B** son iguales (recuérdese que el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado).

$\text{Tan}\ B = h/d$ Igualando: Tan B = Tan x, luego: $h/d = (H-h)/d$ simplificando:
h = H – h; h + h = H luego: 2h = H; que nos deja: h = H/2. El espejo requerido, debe tener una longitud igual a la mitad de la altura de la persona.

120- Datos: aumento lateral = A_L = 2; S= distancia objeto – espejo; s' = distancia imagen – espejo; Y= altura objeto; Y' = altura imagen; S' –s= distancia objeto – imagen.

Tenemos la relación: A_L = Y' / Y = S'/S. Cuando la imagen es invertida, Y' es negativa.

Haciendo: S'/S = 2 nos queda S' = 2S, pero S' – S = 6 así que: S' = 6 + S igualando:
2S = 6 + S; 2S - S = 6 de donde S = 6cm. Luego S' =2 * 6 = 12 cm.
La ecuación de los espejos es:

$1/S' + 1/S = 2/R$; $(S+S')/SS' = 2/R$; $R = 2 * SS'/(S+S')$ Así que obtenemos:
$R = 2*6*12/6+12 = 144/18 = 8\text{cm}.$
Concluimos: posición del objeto, a 6cms del espejo. Posición de la imagen a 12cm del espejo, delante de este puesto real.

121-

Primera posición **Segunda posición**

$S'/S_1 = 4; \quad S' = 4\,S_1$

$1/S_1 + 1/S' = 1/F$

$1/S_1 + 1/4S_1 = 1/F$

$\text{Asi que}: \; F = 4S_1/5 \quad (1)$

$-S''/S_2 = 4; \quad -S'' = 4S_2$

$1/S_2 + 1/S'' = 1/F$

$1/S_2 - 1/4S = 1/F$

$F = 4S_2/3 \qquad (2)$

También tenemos que: $S_1 = S_2 + 10$ (3); igualando (1) y (2):

$4S_1/5 = 4S_2/3$; $\quad 3 * 4S_1 = 5 * 4S_2$; $\quad 3S_1 = 5S_2$ colocando (3):

$3(S_2 + 10) = 5S_2$; $3S_2 + 30 = 5S_2$; $S_2 = 15$cms. Luego $F = \frac{4*15}{3} = 20\ \text{cm}$.

NOTA: Es conveniente que el lector maneje los rayos notables y estime la utilidad de las graficas. Se recomienda un repaso de las propiedades de los espejos...

122- La primera “caja negra” puede contener entre otras, la disposición de los dos prismas equiláteros opuestos por el vértice, como muestra la siguiente figura.

La segunda “caja negra” puede contener una lamina de caras planas y paralelas, tal como se ve a continuación:

En la tercera, podemos colocar dos espejos planos tal como se muestra en la grafica que sigue:

La ultima “caja negra” puede contener entre otras cosas, una lente convergente, que seria una de las disposiciones mas sencillas.

123- Los seres humanos ven, gracias al fenómeno de la refracción, mediante el cual la imagen de los objetos se forma en la retina.
De existir el “hombre invisible”, este tendría el mismo índice de refracción del medio en el cual es invisible, de tal manera que la luz al llegar a sus ojos no interactuaría, sino que

"pasaría" derecho, y el "hombre invisible" no podría ver. De existir el "hombre invisible", seria ciego.

124- Es un espejo convexo, puesto que de ser cóncavo la imagen desaparecería al colocarse en el foco.

125- La figura de la derecha **(b)** es la correcta: el chorro central llega más lejos. De acuerdo con la ley de Torricelli, igualamos la energiza cinética de una vena fluida que sale de un agujero con la energía potencial perdida por el nivel del agua que desciende hasta el nivel del agujero $1/2mV^2_x = mgh$ donde **m** es la masa del agua, $\mathbf{V_x}$ es la velocidad horizontal **g** es la aceleración de la gravedad y **h** es la distancia inicial desde la superficie del agua hasta el agujero.

Despejando v_x:
$V_x = \sqrt{(2gh)}$. Ahora bien, la distancia horizontal recorrida es:

$s_x = v_x$ t donde **t** es el tiempo que requiere la vena liquida para caer a una distancia L – h desde agujero hasta el fondo de la lata (siendo **L** la altura total inicial del agua en la lata). Pero:

$l – h = 1/2\ gt^2$ y por tanto:

$s_x = 2\sqrt{h(L-h)}$, que es máximo cuando h = L – h esto es, L/2 = h.

126- Datos: R_1 = 5cm; R_2 = 50cm. La ventaja mecánica esta dada por la expresión: $V.M. = A_2/A_1 = \pi * R^2{}_2/\pi * R^2{}_1 = 50^2/5^2 = 100$ De manera que esta prensa multiplicada por 100 la fuerza aplicada.

127- el fenómeno de este ejercicio es el llamado PARADOJA HIDROSTATICA, ya que indica que a fuerza ejercida por el líquido en el fondo del recipiente solo depende del área del mismo y de la altura del líquido. Como el área y la altura es la misma en los 3 recipientes, la fuerza sobre el fondo es igual en los tres.

128- Esta tubería de sección variable, por la que corre un líquido, permite poner de manifiesto el principio de BERNOULLI.

129- La altura h es independiente del diámetro del tubo, de su inclinación y de su forma. Conclusión a la que llego TORRICELLI en su experimento, y que se esquematiza en este ejercicio.

130- Como sabemos, el aire caliente es mas liviano que el aire frió, de tal suerte que estando el congelador en la parte superior, el aire frió baja y refrigera "toda" la nevera.

131- La densidad absoluta de una sustancia homogénea es la masa de la unidad de volumen de dicha sustancia. Así. D = m/v.

132- "El aumento de energía de un cuerpo es igual al calor absorbido mas el trabajo realizado sobre el cuerpo por las fuerzas externas".

133- “El calor absorbido de un cuerpo caliente no se puede transformar en trabajo, sin ceder una cantidad menor de calor a un cuerpo frió”.

134- Grosso Modo, se define entropía como la medida del estado de desorden o agitación de las moléculas de un cuerpo.

135- Las resistencias de hallan en paralelo cuando tienen dos puntos en común. Resistencias que tienen solo un punto en común están en serie.

Si R_1, R_2, R_3... R_n son resistencias en paralelo, la resistencia equivalente esta dada por:
$$1/R_{\theta q} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + ...1/R_n$$

Si las anteriores resistencias se hallan en serie la resistencia equivalente esta dada por : $R_{e\,q} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n$. con lo anterior, y atendiendo a que cuando son solo 2 resistencias en paralelo, la equivalente queda:

$R_{\theta q} = R_1 * R_2/(R_1 + R_2)$ Los circuitos se van simplificando como aparece a continuación: